

THÈSE DE DOCTORAT DE L'ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES

spécialité: Océanographie et Météorologie

présentée par Pascal LE ROY

pour obtenir le titre de
DOCTEUR DE L'ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES

sujet de la thèse:

Cascade inverse et dispersion turbulente en turbulence bidimensionnelle

soutenue le 30 juin 1988

devant le jury composé de

M. J. Jacquet	Président
M. C. Basdevant	Rapporteur
M. C. Le Provost	Rapporteur
M. A. Babiano	
Mme B. L. Hua	
M. R. Sadourny	



Je remercie MM. Berroir et Sadourny de m'avoir accueilli au Laboratoire de Météorologie Dynamique.

Je remercie MM. Sadourny et Basdevant pour l'intérêt constant qu'ils ont manifesté pour ces travaux et pour avoir accepté de faire partie du jury.

Je tiens à remercier particulièrement M. Armando Babiano pour son soutien permanent et son aide efficace qui m'ont permis de mener à bien ce travail.

Je voudrais remercier MM. Basdevant et Le Provost d'avoir accepté de rédiger le rapport.

Je remercie également Mme Lien Hua d'avoir accepté de faire partie du jury.

Enfin, je remercie M. Joseph Jacquet qui m'a toujours soutenu et a accepté de présider le jury.

Table des matières

1 Introduction	5
2 La turbulence bidimensionnelle	6
2.1 Motivations	6
2.2 Les équations de la turbulence bidimensionnelle	7
2.3 Théorie et propriétés de la turbulence bidimensionnelle	9
2.3.1 Quelques propriétés de la turbulence bidimensionnelle	9
2.3.2 Cascades: théorie autosimilaire, résultats récents	11
2.4 Observation de la turbulence bidimensionnelle	12
3 Simulation numérique de la turbulence bidimensionnelle	15
3.1 Discrétisation spatiale	15
3.2 Discrétisation temporelle	16
3.3 Les problèmes rencontrés	16
3.3.1 Le choix du pas de temps	16
3.3.2 Modélisation des petites échelles	17
3.3.3 Modélisation du forçage	18
3.4 Modélisation de la cascade inverse d'énergie	18
3.4.1 Modélisation raffinée des échelles sous maille, méthodes APVM	20
3.4.1.1 Avantage de l'APVM par rapport au laplacien itéré	20
3.4.1.2 Mise en œuvre de l'APVM, types de raffinement envisagés	22
3.4.2 Modélisation de la cascade inverse d'énergie: résultats expérimentaux	25
3.4.2.1 Forçage au nombre d'onde 40 (expériences de dispersion relative)	25
3.4.2.2 Forçage au nombre d'onde 256	26
4 Approche lagrangienne de la turbulence bidimensionnelle	32
4.1 Introduction, motivations	32
4.2 Simulation numérique de l'advection des flotteurs lagrangiens	33
4.2.1 Choix d'un schéma temporel	33
4.2.2 Méthode d'interpolation	34
4.3 Contribution à l'étude de la dispersion turbulente	35
4.3.1 Dispersion absolue	36
4.3.2 Dispersion relative	37
4.4 Étude de la dispersion sur des bases cinématiques	38

5 Étude de la couche de mélange bidimensionnelle	43
6 Conclusion, perspectives	45
Références bibliographiques	47
Annexe 1: Dispersion absolue, article paru au Journal of Marine Research	52
Annexe 2: Dispersion relative, Note aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences	77
Annexe 3: Dispersion relative, article soumis au Journal of Fluid Mechanics	81
Annexe 4: Couche de mélange, article accepté par le Journal of Fluid Mechanics	123

1. Introduction

Ce travail comprend différentes études toutes liées à la turbulence bidimensionnelle explorée au moyen de simulations numériques.

Au sein du Laboratoire de Météorologie Dynamique (LMD), mon travail a consisté à continuer à améliorer le modèle de turbulence bidimensionnelle du LMD en mettant au point la simulation d'une cascade inverse d'énergie (les plus grandes échelles de l'écoulement) bien développée. Ceci m'a permis d'étudier dans de bonnes conditions, les propriétés lagrangiennes de la turbulence bidimensionnelle, en effectuant des expériences de dispersion de particules fluides, sur des durées beaucoup plus importantes et dans des conditions plus proches de celles que l'on espère rencontrer dans l'océan ou l'atmosphère.

J'ai joint à cela le travail que j'ai effectué, dans un domaine voisin, à l'Institut de Mécanique de Grenoble (IMG) au cours de mon année de service national, et qui traite des propriétés d'une couche de mélange bidimensionnelle.

Avant d'exposer en détail ces différents travaux, je présenterai brièvement la turbulence bidimensionnelle, les raisons pour lesquelles on l'étudie et ses développements actuels.

2. La turbulence bidimensionnelle

2.1 Motivations

Il peut paraître surprenant de s'intéresser à des écoulements bidimensionnels alors qu'ils n'existent pas à l'état pur dans la nature. Néanmoins, l'étude des équations de Navier Stokes en dimension deux (cas où les composantes de la vitesse ne dépendent que de deux coordonnées d'espace) trouve son intérêt dans le fait que les écoulements planétaires (atmosphère terrestre, océans, atmosphère de Jupiter...) sont bidimensionnels en première approximation. Ces écoulements "géophysiques" ont en outre la particularité d'être fortement turbulents, c'est-à-dire que les effets non linéaires dominent nettement ceux de la viscosité. Ces deux aspects ont motivé les études récentes de la turbulence bidimensionnelle qui possède des propriétés très spécifiques présentées au §2.3.1.

Aux échelles synoptiques, l'atmosphère a un caractère quasi bidimensionnel imposé par les contraintes suivantes:

- i) le rapport d'aspect des échelles verticales sur les échelles horizontales du mouvement est petit (l'atmosphère est une couche mince);
- ii) la stratification de l'atmosphère est stable en moyenne (Pedlosky (1979));
- iii) la rotation de la terre joue un rôle suffisamment important (sauf près de l'équateur) pour que le nombre de Rossby R_O (rapport des effets d'advection sur les effets de rotation) soit petit devant 1.

Ces contraintes ont permis, comme l'a fait Charney (1971), de développer les équations de Navier Stokes en fonction de petits paramètres, pour donner les équations quasi-géostrophiques baroclines. En éliminant les modes verticaux baroclines, ne considérant que le premier mode vertical, on obtient l'approximation quasi-géostrophique barotrope, i.e. un écoulement bidimensionnel non-divergent. C'est ce que nous ferons par la suite en étudiant la turbulence bidimensionnelle incompressible; de ce fait on néglige le rôle (lié à la stratification) joué par l'énergie potentielle dans les écoulements géophysiques.

La même analyse s'applique à l'océan aux échelles moyennes ainsi que dans certains écoulements planétaires et astrophysiques. Il faut noter que la turbulence bidimensionnelle

permet également d'étudier des phénomènes non géophysiques, comme la couche de mélange abordée au chapitre 5.

On s'attend donc à ce qu'un certain nombre de propriétés caractéristiques de la turbulence bidimensionnelle (voir §2.3.1) se retrouvent aux échelles moyennes et grandes des écoulements géophysiques. Mais actuellement les expériences *in situ* ne sont, ni assez nombreuses, ni assez fines pour que l'on puisse conclure sur ce point.

Par contre, en introduisant certaines des contraintes i) ii) iii) ou d'autres en laboratoire, de nombreuses propriétés de la turbulence bidimensionnelle sont retrouvées. Dans ces expériences, trois méthodes ont été utilisées pour contraindre l'écoulement à demeurer quasi bidimensionnel.

Sommeria *et al.* (1982), à Grenoble, utilisent une méthode issue de la Magnéto-Hydro-Dynamique et imaginée par Tsinober (1975). Le fluide (bain de mercure) est soumis à un fort champ magnétique \mathbf{B} qui oblige l'écoulement à demeurer dans un plan perpendiculaire à \mathbf{B} en dissipant par effet Joule toute perturbation tridimensionnelle.

Hopfinger *et al.* (1982), toujours à Grenoble, utilisent une cuve tournante et obtiennent un écoulement quasi bidimensionnel dans des plans perpendiculaires à l'axe de rotation.

Plus récemment, Couder (1984) à Paris, a développé des expériences dans des films de savon où la contrainte géométrique impose un écoulement quasi bidimensionnel.

Les simulations numériques permettent de se placer dans le cadre bidimensionnel strict des équations de Navier Stokes. Étudier la turbulence bidimensionnelle de cette manière présente un double intérêt illustré par l'exemple de la météorologie: d'une part les expériences sur ces modèles "simples" permettent de comprendre plus finement la dynamique de l'atmosphère; d'autre part les progrès de modélisation, conçus sur ce type de modèle simplifié peuvent ensuite être inclus dans des modèles plus complexes de météorologie ou de climat dont chacun connaît l'importance du point de vue économique.

2.2 Les équations de la turbulence bidimensionnelle

Partant des équations de Navier Stokes tridimensionnelles incompressibles, on fait l'hypothèse que vitesse et forçage ne dépendent que des coordonnées horizontales (x,y) et que leurs composantes verticales sont nulles; ceci conduit au système suivant, formellement identique à celui du cas tridimensionnel incompressible:

$$(2.1) \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = - \nabla p + \mathbf{F} + \nu \Delta \mathbf{u}$$

$$(2.2) \quad \text{Div } \mathbf{u} = 0$$

$$(2.3) \quad \text{Conditions aux limites}$$

$$(2.4) \quad \text{Conditions initiales}$$

où \mathbf{u} désigne le vecteur vitesse horizontale, ∇ l'opérateur gradient horizontal, Δ l'opérateur laplacien horizontal, \mathbf{F} le forçage (horizontal), p la pression et ν la viscosité cinématique. La densité est supposée constante et égale à l'unité.

Dans certains cas de conditions aux limites et en particulier dans le cas périodique, on montre qu'il existe une fonction ψ , dite fonction de courant, telle que si $\mathbf{u}=(u,v)$,

$$u = - \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$v = \frac{\partial \psi}{\partial x} .$$

En dimension deux, la seule composante non nulle du tourbillon (vorticité) ou rotationnel de la vitesse est sa composante verticale qui sera notée $\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \Delta \psi$.

En terme (ψ, ω) le système (2.1-2.4) s'écrit alors:

$$(2.5) \quad \frac{d\omega}{dt} = \nu \Delta \omega + \text{rot } \mathbf{F}$$

$$(2.6) \quad \omega = \Delta \psi$$

$$(2.7) \quad \text{Conditions aux limites}$$

$$(2.8) \quad \text{Conditions initiales}$$

où l'on a introduit la dérivée particulière $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla$.

L'équation (2.5) qui est l'équation (2.1) à laquelle on a appliqué l'opérateur rotationnel, constitue ce que l'on a coutume d'appeler l'équation de la vorticité, qui peut également prendre la formulation suivante:

$$(2.9) \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} + J(\psi, \omega) = \nu \Delta \omega + \text{rot } F$$

$$\text{où } J \text{ est l'opérateur Jacobien: } J(a, b) = \frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial b}{\partial y} - \frac{\partial a}{\partial y} \frac{\partial b}{\partial x}$$

Cette formulation est celle que nous utiliserons le plus souvent dans cette thèse, en particulier c'est sous cette forme que l'équation de Navier Stokes bidimensionnelle est résolue dans nos simulations numériques.

Dans un modèle global de l'atmosphère basé sur la sphère entière, le problème des conditions aux limites ne se pose pas. Aussi nous nous placerons dans le cas simple d'un domaine carré périodique.

En l'absence de forçage et viscosité, les équations (2.1-2.5) admettent au moins deux invariants quadratiques qui jouent un rôle fondamental dans la dynamique non linéaire: l'énergie $E = \frac{1}{2} \langle u^2 \rangle$ et l'enstrophie $Z = \frac{1}{2} \langle [\text{rot } u]^2 \rangle$ où $\langle . \rangle$ est l'opérateur de moyenne spatiale sur l'ensemble du domaine étudié.

Dans le cas périodique (de période L) ceux-ci ont pour expression

$$E = -\frac{1}{2} \frac{1}{L^2} \int_D \psi(x) \omega(x) dx \quad \text{et} \quad Z = \frac{1}{2} \frac{1}{L^2} \int_D \omega(x) \omega(x) dx$$

où, D est un domaine de périodicité.

2.3 Théorie et propriétés de la turbulence bidimensionnelle

2.3.1 Quelques propriétés de la turbulence bidimensionnelle

L'existence d'un deuxième invariant (l'enstrophie) particularise nettement la turbulence bidimensionnelle par rapport à la turbulence tridimensionnelle. Ceci est la raison principale pour laquelle ces deux types de turbulences ont des propriétés très différentes qui exigent le développement de théories, elles aussi, distinctes.

Les théories de la turbulence bidimensionnelle (Kraichnan (1967), Leith (1968), Basdevant (1981), Lesieur (1983)) supposent que l'on se place à grand nombre de Reynolds (les termes inertiels - non linéaires - dominant les termes visqueux), en régime entretenu par un mécanisme qui injecte énergie et enstrophie au voisinage d'une échelle donnée l_I associée au nombre d'onde k_I . Dans ce contexte les termes inertiels de l'équation de Navier Stokes vont engendrer deux types de cascades inertielles dites cascade d'enstrophie et cascade inverse d'énergie. La première correspond à un transfert d'enstrophie vers des échelles de plus en plus petites, jusqu'à l'échelle l_D de dissipation visqueuse, associée au nombre d'onde k_D . La seconde cascade correspond à un transfert d'énergie en sens inverse, vers des échelles de plus en plus grandes. Ceci provient de ce que les transferts d'énergie ne peuvent statistiquement s'effectuer que vers les grandes échelles (petits nombres d'onde) du fait que l'enstrophie ne peut croître, Fjørtoft (1953).

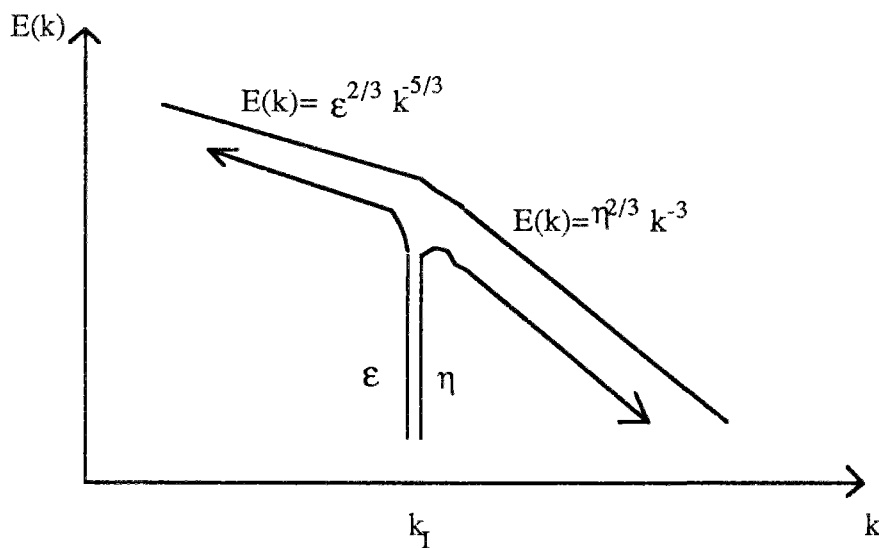
Dans l'espace physique la turbulence bidimensionnelle se caractérise d'une part par la naissance de structures intenses très localisées (structures cohérentes) à durée de vie très longue (Basdevant *et al.* (1981), McWilliams (1984), Couder *et al.* (1986) et Babiano *et al.* (1987a)), et d'autre part par la présence sur le pourtour des tourbillons de zones de très forts cisaillements de vitesse et donc de forts gradients du tourbillon, Brachet *et al.* (1986). La cascade d'enstrophie se matérialise par la création de structures fines aux endroits de fort cisaillement. La cascade inverse d'énergie est plus difficile à mettre en évidence et fera l'objet d'un chapitre de cette thèse; néanmoins, comme on pourra le voir, elle se traduit clairement par l'existence de structures (non cohérentes) d'échelles supérieures à celle du forçage.

Deux autres propriétés caractérisent ce type de dynamique: l'intermittence et l'imprédictibilité. L'intermittence est de nature aussi bien spatiale que temporelle: les structures énergétiques sont très localisées; les zones où les transferts sont les plus actifs se situent entre deux de ces structures intenses, ce qui ne se produit que de manière sporadique lors d'interactions fortes ou bien de collisions. L'imprédictibilité provient de ce que la dynamique est très sensible aux conditions initiales et aux perturbations (Lorenz (1969), Basdevant *et al.* (1981)); on sait par exemple que des prévisions météorologiques déterministes sont impossibles au delà d'une échéance de quinze jours.

Au delà, les expériences ne peuvent avoir qu'un intérêt statistique, à condition toutefois que le "climat" du modèle soit correct, ce qui, dans la pratique se vérifie en s'assurant que les interactions non linéaires et les bilans d'énergie et d'enstrophie sont conformes à ce que l'on attend.

2.3.2 Cascades: théorie autosimilaire, résultats récents

Des arguments dimensionnels, semblables à ceux de la théorie autosimilaire de Kolmogorov (1941) dans le cas tridimensionnel, ont permis de préciser la signature spectrale des cascades d'énergie et d'entrophie. Se plaçant dans le cas stationnaire et supposant qu'au voisinage de k_I l'énergie est injectée au taux ε et l'entrophie au taux $\eta = k_I^2 \varepsilon$, Kraichnan (1967) et Leith (1968) ont obtenu, pour la cascade d'entrophie, un spectre d'énergie de la forme $E(k) \sim \eta^{2/3} k^{-3}$; pour cela, ils ont supposé que $k_I \ll k \ll k_D$, c'est-à-dire qu'ils se sont placés dans une zone, dite inertielle, non influencée par le forçage et la viscosité, de telle manière que le spectre d'énergie ne dépende que de η et k . Selon un raisonnement analogue ($E(k)$ ne dépend que de ε et k), l'énergie, elle, cascade vers des petits nombres d'onde inférieurs à k_I en suivant la cascade inverse d'énergie suivante: $E(k) \sim \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}$ pour $k \ll k_I$. Tout ceci est résumé dans la figure suivante:



Concernant ces deux cascades, la valeur des exposants (-3 et -5/3) des lois de puissance, qui leur sont associées, demeure très controversée (Basdevant *et al.* (1981), McWilliams (1984), Babiano *et al.* (1985), Babiano *et al.* (1987a)).

Néanmoins, récemment il semble que soit apparue une certaine concordance des résultats expérimentaux concernant la cascade d'entrophie. En effet des simulations numériques de turbulence bidimensionnelle entretenue ont été réalisées par Legras *et al.* (1988) dans des résolutions de 512^2 , et par moi même aux résolutions 1024^2 et 1728^2 (voir Annexe 3, figures 7, 8 et 9). Ces expériences indépendantes ont mis en évidence les mêmes comportements, à savoir que la cascade d'entrophie est constituée de deux gammes de nombres d'onde: d'une part les nombres d'onde voisins de la zone de forçage, où la dynamique est dominée par

l'activité des structures cohérentes avec un spectre d'énergie très raide (de k^{-4} à k^{-6} selon les expériences); d'autre part les nombres d'onde les plus grands pour lesquels il se dégage un spectre très clairement en loi de puissance, de la forme $E(k) \sim k^{-n}$ avec, ce qui est remarquable, $n=3,5 \pm 0,1$ dans toutes les expériences citées. Ainsi, même si la loi $E(k) \sim k^{-3}$ de Kraichnan (1967) et Leith (1968) n'est pas retrouvée, il semble malgré tout se dégager un domaine d'échelles où la cascade d'ensrophie a un comportement universel voisin de $E(k) \sim k^{-3.5}$.

Concernant la cascade inverse, très peu d'expériences précises ont été menées. Frisch *et al.* (1984) ont travaillé avec des résolutions trop faibles pour conclure. Au §3.4 je présente une série d'expériences réalisées à beaucoup plus haute résolution (1024^2) qui permettent entre autre de montrer que dans la cascade inverse le spectre d'énergie est proche de la loi $E(k) \sim k^{-5/3}$ prédite par Kraichnan (1967) et Leith (1968).

2.4 Observation de la turbulence bidimensionnelle

Quand il s'agit d'observer la turbulence bidimensionnelle *in situ* ou en laboratoire, deux difficultés principales se posent:

- i) pouvoir observer: il faut dégager des grandeurs observables qui puissent être confrontées aux grandeurs dont la théorie de la turbulence bidimensionnelle prédit le comportement;
- ii) s'assurer qu'il s'agit d'une turbulence bidimensionnelle: on doit dégager des "identificateurs" qui permettent de savoir si l'écoulement a un caractère qui se rapproche de celui de la turbulence bidimensionnelle.

Ces deux problèmes liés l'un à l'autre, ne sont pas faciles à résoudre. D'une part le théoricien, jusqu'ici, a surtout étudié le comportement de grandeurs spectrales (dans l'espace de Fourier), d'autre part l'expérimentateur, lui, n'a accès directement, qu'à des grandeurs de l'espace physique. Il faut donc que le théoricien s'intéresse à des grandeurs liées à l'espace physique. Cette nécessité a aussi une origine fondamentale dans la mesure où les expériences, aussi bien numériques que de laboratoire (voir §2.3.1), ont mis en évidence le rôle important joué par les structures "locales" (tourbillons, structures cohérentes) dans la dynamique de la turbulence bidimensionnelle. Or le caractère local dans l'espace physique de ces phénomènes, ne peut pas être perçu par des grandeurs spectrales (comme le spectre d'énergie) intégrées sur l'ensemble de l'espace physique.

Pour faire le lien entre expérience et théorie, l'expérimentateur est obligé d'utiliser des hypothèses souvent artificielles pour, par exemple, mesurer un spectre d'énergie à partir de lois de dispersion, comme pour l'expérience atmosphérique EOLE, Morel *et al.* (1974), les expériences océaniques de Price (1981) ou encore les expériences de laboratoire, Hopfinger *et al.* (1982). Desbois (1975) a reconstitué les corrélations eulériennes de vitesse à partir des mesures d'EOLE et en a déduit le spectre d'énergie. Dans tous les cas les résultats mettaient en évidence une gamme d'échelles associée à un spectre d'énergie de la forme $E(k) \sim k^{-3}$.

Ce résultat semblait clairement indiquer la présence d'une turbulence bidimensionnelle et permettait également de valider la loi prédite par Kraichnan (1967) et Leith (1968) dans la cascade d'entrophie. Malheureusement, les expériences numériques réalisées par la suite ne sont pas allées dans le même sens et ont systématiquement conduit à des spectres d'énergie beaucoup plus pentus. On a d'abord mis en cause les simulations numériques, mais on s'est finalement rendu compte qu'il fallait plutôt mettre en cause les résultats des expériences *in situ* ou en laboratoire, et en particulier les méthodes utilisées pour obtenir les spectres d'énergie à partir des grandeurs observées (lois de dispersion, corrélations eulériennes de vitesse...).

En effet, Babiano *et al.* (1985), ont étudié un certain nombre de grandeurs facilement mesurables par l'expérience, comme la fonction de structure eulérienne $S(r)$, la corrélation eulérienne ou encore le coefficient instantané de dispersion relative $X(D)$ (défini à la relation 11 de l'Annexe 3). Ils ont pu montrer, théoriquement et par l'expérience numérique, que ces grandeurs ne permettaient pas de déterminer correctement le spectre d'énergie, considéré jusqu'à présent comme grandeur clé par le théoricien. Ils ont ainsi mis en évidence un principe d'indétermination du spectre d'énergie $E(k) \sim k^{-n}$, qui vient de ce que pour toutes les valeurs de $n \geq 3$, les grandeurs $S(r)$ et $X(D)$ vérifient des lois pratiquement indistingables, i.e. indépendantes de n , dès que la statistique ne porte pas sur un échantillon très fourni. En d'autres termes, la mesure expérimentale de $S(r)$ et $X(D)$ ne permettra pas de distinguer des spectres d'énergie plus pentus que k^{-3} . Ainsi il est fort probable que les spectres en k^{-3} mesurés *in situ* ou en laboratoire indiquent seulement que ces spectres sont en réalité plus pentus que k^{-3} .

L'expérimentateur (Hopfinger *et al.* (1982), Er-El *et al.* (1981), Price (1981)) étudie plutôt l'évolution temporelle de la dispersion relative, et en particulier celle du coefficient de dispersion relative $Y(t)$ défini en Annexe 3 (7). Il n'y a pas de lien direct entre ce coefficient $Y(t)$ et le spectre d'énergie $E(k)$; mais, se basant sur les théories phénoménologiques, Kraichnan (1966), Lin (1972) et Bennett (1984) associent des lois de dispersion précises à chaque cascade de la turbulence bidimensionnelle (voir §4.3.2); lois qui semblent bien validées par les expériences citées plus haut. Néanmoins les bases phénoménologiques de ces comportements obligent à se poser les questions suivantes:

- i) quelle est la valeur exacte de ces comportements ?
- ii) dans quelles conditions peuvent-ils être observés ?

Des réponses à ces questions sont apportées au §4.3.2 et en Annexe 3.

C'est ce souci de dégager des grandeurs utilisables, à la fois par l'expérimentateur qui les observe, et le théoricien qui essaie d'en prévoir le comportement, qui a motivé le déroulement de cette thèse: dans le chapitre 4, nous avons développé une approche lagrangienne de la turbulence bidimensionnelle. Auparavant, dans le chapitre 3, nous présentons brièvement ce qu'est la simulation numérique de la turbulence bidimensionnelle en insistant plus particulièrement sur ma contribution personnelle: une modélisation correcte de la cascade inverse d'énergie, développée dans le but de rendre nos expériences plus réalistes, dès qu'elles concernaient les grandes échelles de l'écoulement.

3 Simulation numérique de la turbulence bidimensionnelle

Les équations (2.5 et 2.9) qui régissent la turbulence bidimensionnelle incompressible ne peuvent être résolues analytiquement; aussi dans la pratique il s'avère nécessaire d'utiliser des méthodes numériques. Nous en présenterons brièvement quelques unes et plus particulièrement celle du modèle du LMD utilisé aux chapitres 3 et 4 de cette thèse.

En général on utilise la formulation eulérienne (2.9, 2.6, 2.7, 2.8) du problème et l'on discrétise en deux temps: d'une part les termes de dérivation spatiaux, d'autre part ceux de dérivation temporels. C'est ce que nous allons détailler maintenant, en nous basant sur Basdevant (1982) où le modèle de turbulence du LMD est décrit en détail.

3.1 Discrétisation spatiale

Les conditions aux limites périodiques que nous utilisons permettent de choisir une discrétisation spatiale simple où les fonctions utilisées (ψ, ω) sont données sous forme de séries de Fourier tronquées (Orzag (1971), Patterson *et al.* (1971), Basdevant (1981), Brachet *et al.* (1986)), il s'agit des méthodes spectrales.

Toutes les fonctions étant de période L elles peuvent être (moyennant des hypothèses de régularité) développées en séries de Fourier; par exemple pour le tourbillon:

$$(3.1) \quad \omega(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k} \in \left(\frac{2\pi}{L}\mathbb{Z}\right)^2} \hat{\omega}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}$$

Les méthodes spectrales consistent à ne retenir dans (3.1) qu'un nombre fini de composantes, c'est-à-dire chercher une solution approchée de (2.6-2.9) sous la forme d'un polynôme trigonométrique. On choisit un domaine borné D de vecteurs d'onde (symétrique par rapport à l'origine pour que les fonctions représentées soient réelles) et l'on s'intéressera à l'ensemble F_D des fonctions dont les composantes de Fourier extérieures à D sont nulles.

Contrairement à la dérivation, le produit de deux fonctions de F_D n'est généralement pas interne à F_D . On introduit alors une projection P qui projette tout polynôme trigonométrique sur F_D , ce qui définit une méthode spectrale. De cette manière (2.9) devient:

$$(3.2) \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} + P(J(\psi, \omega)) = \nu \Delta \omega + \text{rot } \mathbf{F}$$

Plusieurs choix de projecteurs sont possibles. Dans nos expériences nous utiliserons la méthode de Fourier-Galerkin où P est le projecteur orthogonal sur les polynômes de F_D . Sans force extérieure ni viscosité, cette méthode conserve les invariants quadratiques.

Un autre choix de projecteur a conduit à la méthode de collocation, Orzag (1971), Patterson *et al.* (1971), très efficace pour le calcul du Jacobien.

Les méthodes spectrales ne sont pas les seules utilisées, souvent les fonctions sont représentées par des fonctions polynômiales par morceaux. Avec ces méthodes dites "aux différences finies", (2.9) s'écrit dans l'espace physique avec un Jacobien J discrétisé selon les techniques développées par Arakawa (1966); c'est d'ailleurs ce type de méthode qui est utilisé pour la modélisation de la couche de mélange présentée au chapitre 5 de cette thèse.

3.2 Discrétisation temporelle

Pour des raisons de coût de calcul, on choisit généralement une discrétisation explicite des termes non linéaires de l'équation de Navier Stokes. Le choix d'un schéma dépend de la précision souhaitée (qui détermine le nombre de champs à stocker sur un pas de temps Δt) et des propriétés de stabilité. Nous utilisons un schéma centré du second ordre (leap-frog) qui permet de résoudre de manière approchée à l'ordre deux en temps, les problèmes du type $f'(t)=G(t)$ en déterminant f aux différents pas de temps $t_n=n.\Delta t$ selon la formule $f(t_{n+1})=f(t_{n-1})+2\Delta t.G(t_n)$. Périodiquement, sur un pas de temps, ce schéma leap-frog est remplacé par un schéma dit d'Euler suivi d'un lissage, dans le but d'éviter que les solutions aux pas de temps pairs et impairs ne se séparent. Le schéma d'Euler résout aussi $f'(t)=G(t)$ mais à l'ordre 1 seulement, selon la formule $f^*(t_{n+1})=f(t_n)+\Delta t.G(t_n)$. Ce schéma étant de moins bonne qualité, la solution $f^*(t_{n+1})$ ainsi obtenue est provisoire; dans un premier temps, elle permet d'obtenir la solution $f(t_{n+2})$ par schéma leap-frog. La solution $f(t_{n+1})$ est alors obtenue définitivement en opérant un lissage sur les pas t_n , t_{n+1} et t_{n+2} comme suit:

$$f(t_{n+1}) = \frac{1}{4} f(t_n) + \frac{1}{2} f^*(t_{n+1}) + \frac{1}{4} f(t_{n+2})$$

3.3 Les problèmes rencontrés

3.3.1 Le choix du pas de temps

Dans notre modèle, le choix du pas de temps Δt est soumis à la condition de Courant Friedrichs et Lewy (CFL) qui impose $\| \mathbf{u} \Delta t k_{\max} \| < 1$ où k_{\max} est le nombre d'onde maximum lié à la résolution Δx de la grille de calcul. Ce critère de CFL peut devenir très contraignant car toute augmentation de la résolution du modèle se traduit par une diminution d'autant du pas de temps. Pour y remédier, de nouvelles méthodes de résolution numérique des équations de Navier Stokes sont envisagées; elles s'affranchissent de la condition de CFL avec une condition sur le pas de temps qui ne dépend plus de la résolution du modèle; c'est le cas du "modèle semi-lagrangien" mis au point dans sa thèse par Abgrall (1987), Abgrall *et al.* (1987).

3.3.2 Modélisation des petites échelles

Comme nous l'avons vu, avec la projection utilisée (Fourier-Galerkin) dans notre modèle, l'équation de Navier Stokes tronquée conserve les deux invariants quadratiques énergie et enstrophie.

L'utilisation de cette projection constitue une différence importante par rapport aux équations non tronquées. En effet, même à partir d'un spectre borné (en nombre d'onde), l'équation de Navier Stokes engendre instantanément un spectre non borné par l'intermédiaire des termes non linéaires, alors que le spectre obtenu avec le système tronqué, reste sur un domaine borné de nombres d'onde.

Les petites échelles du modèle sont alors systématiquement surestimées par rapport aux grandes et moyennes échelles de celui-ci. Dans la pratique, le nombre d'onde de coupure k_C , se situe dans la cascade d'enstrophie. Celle-ci est donc bloquée alors qu'elle devrait se poursuivre jusqu'à l'échelle de dissipation, Basdevant *et al.* (1975), Kraichnan (1976).

Il est donc indispensable de dissiper l'enstrophie excédentaire qui s'accumule au voisinage de la troncature spectrale. Pour cela, on s'arrange pour engendrer artificiellement un flux d'enstrophie au voisinage de la troncature spectrale, tout en essayant d'éviter que lui soit associé un flux d'énergie, puisque l'on est dans la cascade d'enstrophie. Ceci s'effectue au moyen d'une modélisation, dite sous maille, qui simule l'action des échelles inférieures à la maille du modèle (nombres d'onde supérieurs à k_C) sur les échelles explicitement calculées.

Les modélisations adéquates doivent être locales à la fois dans l'espace spectral (près de la troncature) et dans l'espace physique (sur le pourtour des tourbillons où l'on s'attend à ce que la cascade d'enstrophie soit la plus active).

Dans les modèles spectraux ces conditions sont bien remplies en ajoutant au système (3.2, 2.6, 2.7, 2.8) un opérateur de type laplacien itéré, Basdevant (1981), Basdevant *et al.* (1983), ou bien en utilisant une modélisation du type APVM, Basdevant *et al.* (1983) et Sadourny *et al.* (1985), qui présente l'avantage de conserver formellement l'énergie (on

trouvera une description plus détaillée des méthodes du laplacien itéré, de l'APVM et de leurs avantages et inconvénients respectifs au §3.4.1).

3.3.3 Modélisation du forçage

Dans la nature, que ce soit l'océan ou l'atmosphère, le forçage est produit à l'échelle du rayon interne de déformation, par l'instabilité barocline. Le mécanisme de forçage n'est donc pas bidimensionnel. En conséquence, dans nos simulations numériques bidimensionnelles, la modélisation du forçage est forcément artificielle et ne peut en aucun cas reproduire un phénomène naturel. C'est pourquoi, dans nos simulations nous ne cherchons pas à raffiner la modélisation du forçage. Nous avons choisi une méthode simple, efficace et facile à mettre en œuvre, qui consiste à maintenir constant le niveau de vorticité (dans l'espace spectral) d'un nombre d'onde k_I donné, de module k_I associé à l'échelle de forçage l_I .

Enfin, rappelons que c'est cette échelle de forçage l_I qui permet de convertir les données a-dimensionnelles de notre modèle en données physiques réelles, tout au moins pour ce qui concerne les longueurs, il suffit pour cela de connaître la valeur du rayon interne de déformation dans le système physique considéré.

3.4 Modélisation de la cascade inverse d'énergie

Comme nous l'avons vu au §2.3, la cascade inverse d'énergie désigne la partie du spectre d'énergie correspondant à des échelles plus grandes que les échelles où énergie et enstrophie sont injectées. La cascade inverse d'énergie doit son appellation au fait qu'elle désigne une gamme d'échelles où les transferts dominants sont effectivement des transferts d'énergie qui, contrairement aux autres cas (cascade d'énergie en turbulence tridimensionnelle, cascade d'enstrophie en turbulence bidimensionnelle) s'effectuent en sens inverse c'est-à-dire d'une échelle plus petite (l'échelle d'injection) vers des échelles plus grandes.

Rappelons que Fj  rtoft (1953) fut le premier à prendre conscience de cette propriété tout à fait spécifique à la turbulence bidimensionnelle, à savoir que seuls des transferts d'énergie vers les petits nombres d'onde pouvaient être compatibles avec la conservation de l'enstrophie qu'impose la turbulence bidimensionnelle. Plus tard, Kraichnan (1967) et Leith (1968) ont conjecturé que la cascade inverse d'énergie doit se caractériser par un spectre $E(k)$ proportionnel à $\epsilon^{2/3} k^{-5/3}$ (voir §2.3.2) avec transfert (inverse) d'énergie au taux ϵ indépendant de k , sans transfert d'enstrophie.

Dans un modèle numérique de turbulence bidimensionnelle, une modélisation correcte de la cascade inverse d'énergie est plus difficile que celle de la cascade d'enstrophie. En effet,

dans les deux cas de cascade on ne peut pas se passer d'une modélisation au moins partielle de l'autre cascade.

Ainsi, pour obtenir une simulation acceptable de la cascade d'entrophie, on doit simuler une petite cascade inverse, ce que l'on fait en forçant à un nombre d'onde supérieur au nombre d'onde minimum de la simulation, i.e. $k_{\min}=1$ dans le cas de notre modèle de période 2π ; dans les expériences de Basdevant (1981), Basdevant *et al.* (1981) ou Babiano *et al.* (1985), un forçage au nombre d'onde $k_I=4$ donnait de bons résultats avec, dans la résolution adoptée (128^2 , correspondant à un nombre d'onde maximum $k_{\max}=64$), une cascade d'entrophie bien représentée puisque décrite sur une soixantaine de nombres d'onde.

Pour la cascade inverse, un résultat de qualité similaire exige une résolution beaucoup plus élevée, ainsi par exemple, si l'on veut ici aussi décrire la cascade inverse sur une soixantaine de nombres d'onde, en prenant $k_I=64$, et si l'on veut respecter le rapport 4 entre les plus grandes et plus petites de la cascade d'entrophie, on a nécessairement $k_{\max}\geq 256$, c'est-à-dire au minimum une résolution de 512^2 .

En fait, la difficulté de simulation de la cascade inverse par rapport à celle d'entrophie est encore augmentée par un problème particulier qui tient à la différence des temps caractéristiques liés aux deux cascades: les phénomènes d'échelle située dans la cascade d'entrophie ont des temps caractéristiques beaucoup plus courts que ceux situés dans la cascade inverse.

Ainsi il sera possible d'observer une bonne cascade d'entrophie, que la cascade inverse soit ou non bien établie, alors que la réciproque n'est pas vraie: une cascade inverse bien établie se produit nécessairement plus tard que l'établissement de la cascade d'entrophie, d'où la nécessité d'une bonne cascade d'entrophie pour pouvoir simuler correctement la cascade inverse.

Ces conditions sévères associées aux progrès récents en taille mémoire des gros calculateurs (comme le Cray 2 du Centre de Calcul Vectoriel pour la Recherche - CCVR), nous ont poussés à mettre au point des simulations de grande résolution pour pouvoir simuler la cascade inverse d'énergie de manière encore plus fine que nous l'envisagions ci-dessus. En choisissant un forçage au nombre d'onde $k_I=256$, si l'on se fie au critère défini ci-dessus, une résolution d'au moins 2048^2 est requise avec la modélisation sous maille utilisée jusqu'à présent (laplacien itéré, voir §3.3.2). Cette résolution, bien qu'envisageable sur le Cray 2 est néanmoins beaucoup trop coûteuse en temps de calcul pour que nous l'ayons adoptée.

Nous avons préféré raffiner la modélisation des échelles sous mailles (voir §3.3.2) pour obtenir une simulation de qualité analogue avec une résolution moindre. Dans la partie qui suit nous présenterons brièvement la méthode sous maille utilisée: l'APVM, Sadourny *et al.* (1985), et divers raffinements qui ont été tentés, dans une partie suivante nous présenterons

les résultats expérimentaux obtenus, en les confrontant aux conjectures théoriques de Kraichnan (1967) et Leith (1968).

3.4.1 Modélisation raffinée des échelles sous maille, méthodes APVM

Comme nous l'avons vu au §3.3.2, toute simulation numérique de turbulence bidimensionnelle requiert une modélisation de l'action des échelles inférieures à la maille. Plusieurs méthodes ont été envisagées, dont le laplacien itéré et l'APVM déjà évoqués; pour une revue détaillée sur la question on consultera utilement Basdevant *et al.* (1983).

3.4.1.1 Avantage de l'APVM par rapport au laplacien itéré

Dans leurs simulations numériques, Basdevant (1981), Basdevant *et al.* (1981), Babiano *et al.* (1985) et Babiano *et al.* (1987b) utilisent comme sous maille la méthode du laplacien itéré (8 fois en l'occurrence) décrite dans Basdevant (1981) et Basdevant *et al.* (1983) et qui consiste à remplacer (3.2) par

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + P[J(\psi, \omega)] = \text{rot } \mathbf{F} - \nu_d (-\Delta)^\gamma \omega$$

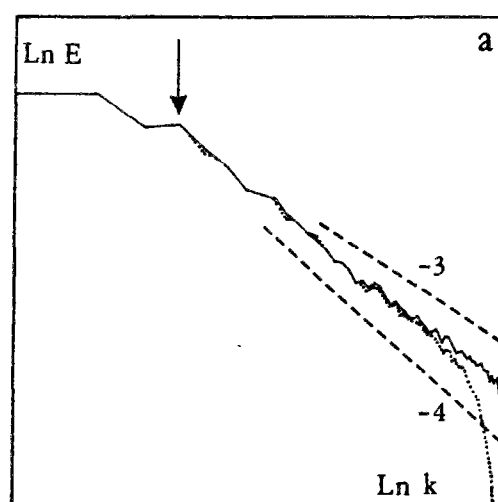
où γ est la dissipativité (choisie égale à 8 en général) et où la "pseudo" viscosité ν_d est choisie en sorte que les structures d'échelle inférieure ou égale à la maille soient dissipées en moins d'un pas de temps.

Cette méthode est très avantageuse car, tout en étant très économique et facile à mettre en œuvre, elle se rapproche fortement des buts fixés au §3.3.2, avec en particulier:

- i) une action locale, à la fois dans l'espace physique (la modélisation sous maille dissipe là où le laplacien itéré de la vorticité est fort), et dans l'espace spectral (plus la dissip tivit  est élevée, plus la bande spectrale affectée par la dissipation est étroite et localisée en bout de spectre);
- ii) une dissipation d'énergie négligeable par rapport à celle de l'enstrophie, et ce d'autant plus que la dissip tivit  est élevée.

Néanmoins, les buts fixés au §3.3.2 ne sont pas rigoureusement atteints dans la mesure où, même en adoptant une dissip tivit  élevée, il y aura toujours une dissipation d'énergie et une zone non négligeable du spectre affectée par cette dissipation. La méthode du laplacien itéré n'est donc pas compl tement satisfaisante. C'est pourquoi Basdevant et Sadourny ont développé une nouvelle modélisation des échelles sous mailles, dite du tourbillon anticipé ou encore APVM pour "Anticipated Potential Vorticity Method", d'abord dans Sadourny *et al.*

(1981), puis dans Basdevant *et al.* (1983) et enfin dans Sadourny *et al.* (1985). Cette méthode a été développée dans le but de créer une modélisation des échelles sous mailles qui conserve formellement l'énergie tout en dissipant l'enstrophie. La modélisation APVM est donc rigoureusement conforme à ce que l'on attendait au §3.3.2 et la comparaison des résultats de simulations utilisant le laplacien itéré et l'APVM, présentée dans Basdevant *et al.* (1983), est très à l'avantage de l'APVM. Ainsi, dans la cascade d'enstrophie, les flux d'énergie sont beaucoup plus proches des prévisions de Kraichnan (1967) et Leith (1968), c'est-à-dire un flux d'énergie nul et un flux d'enstrophie constant jusqu'au voisinage de la troncature; en outre, on note l'absence totale de zone de dissipation dans le spectre d'énergie, ce que l'on retrouve dans la figure suivante, extraite de Basdevant *et al.* (1983); y est représenté le spectre d'énergie de deux simulations numériques ne différant que par la modélisation sous maille utilisée; en pointillé un laplacien itéré 8 fois, en trait continu l'APVM.



Récemment, Vallis *et al.* (1988) ont étudié finement les avantages et inconvénients de l'APVM en examinant plus particulièrement le comportement de la viscosité turbulente effective associée à cette modélisation. Eux aussi sont arrivés à la conclusion que l'APVM avait une action aussi bonne, voire meilleure que les autres méthodes de complexité comparable; ils émettent néanmoins deux réserves:

- i) le fait que la méthode APVM produise une dissipation d'enstrophie qui n'est pas un invariant galiléen pose-t-il des problèmes importants ? notamment dans les modèles d'océan où l'écoulement moyen peut être important.
- ii) la méthode APVM n'est pas adaptée aux très basses résolutions où la troncature intervient dans un domaine d'échelles très énergétiques, ce à quoi l'on pouvait s'attendre puisque dans cette gamme d'échelles il doit y avoir transfert d'énergie alors que l'APVM est précisément conçue pour qu'il n'y en ait pas au niveau de la troncature.

Enfin, une conséquence pratique très importante de l'utilisation de l'APVM est que pour une même résolution, une gamme d'échelle sensiblement plus large est correctement simulée puisque, comme on le voit sur la figure ci-dessus, la gamme de nombres d'onde où le spectre est bien simulé va pratiquement jusqu'à la troncature spectrale; de manière équivalente, on peut aussi dire que pour simuler correctement jusqu'à une certaine finesse d'échelle, on a besoin d'une résolution sensiblement moins élevée dans le cas de l'APVM que dans celui du laplacien itéré. C'est pourquoi, bien que légèrement plus coûteuse et plus difficile à mettre en œuvre, dès que l'on aura besoin de se limiter en résolution, on aura intérêt à utiliser l'APVM comme modélisation sous maille.

3.4.1.2 Mise en œuvre de l'APVM, types de raffinement envisagés

La modélisation APVM proposée par Basdevant et Sadourny consiste à remplacer l'équation (3.2) par

$$(3.3) \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} + P \left[J(\psi, \omega - \theta \Delta^p [J(\psi, \omega)]) \right] = \text{rot } F$$

où θ est un temps caractéristique estimé, sur des bases phénoménologiques, proportionnel à l'inverse de la racine carrée de l'ensrophie Z ($\theta = aZ^{-1/2}$), enfin p a été choisi égal à 4 pour concentrer l'action de l'APVM sur les structures fines.

On vérifie aisément qu'en l'absence de forçage, il y a effectivement conservation de l'énergie. Il est clair également que la dissipation d'ensrophie sera d'autant plus élevée que le temps caractéristique θ sera élevé.

Il y a donc une certaine marge de manœuvre sur le taux de dissipation d'ensrophie, que l'on modifiera en changeant le coefficient de proportionnalité a . Néanmoins, dans la pratique, cette marge de manœuvre est relativement étroite. En effet, le coefficient a ne peut varier que dans un intervalle $[\alpha, \beta]$ déterminé par les conditions suivantes: quand $a < \alpha$ la dissipation d'ensrophie est négligeable: l'APVM n'a plus d'action, et pour $a > \beta$ le modèle diverge car la dissipation APVM constitue un terme non linéaire; or dans la pratique, lorsque le pas de temps a été choisi en fonction du terme inertiel (condition CFL) α et β sont très proches et la latitude de choix pour a est donc très réduite. L'intervalle $[\alpha, \beta]$ pourrait être élargi en diminuant le pas de temps, mais l'augmentation de durée des expériences que cela entraînerait diminuerait grandement l'intérêt de la méthode. Dans la pratique le choix adopté est généralement $a = \beta$ que l'on détermine empiriquement, il conduit à des résultats satisfaisants comme ceux présentés par Basdevant *et al.* (1983).

Bien que déjà très satisfaisante, j'ai essayé d'améliorer la méthode APVM dans le but d'obtenir une dissipation plus efficace (i.e. ne pas être obligé de choisir $a = \beta$) et mieux

répartie dans l'espace physique. Nous pensions en effet que la dissipation APVM serait encore plus adaptée si elle agissait exactement là où il fallait dans l'espace physique; or, *a priori*, le choix adopté d'un temps caractéristique θ global, indépendant des caractéristiques dynamiques locales du champ n'allait pas vraiment dans ce sens. C'est pourquoi je me suis intéressé à des temps caractéristiques θ fonction de certaines données locales de la dynamique. Le coefficient θ est donc devenu une fonction de la position dans l'espace physique, et s'est alors posé le problème du choix des caractéristiques dynamiques dont pourrait dépendre θ . Pour cela, je me suis basé sur les idées de Weiss (1981) reprises par McWilliams (1984), Brachet *et al.* (1986) et Abgrall (1987), qui posent de la manière suivante le problème de savoir où l'enstrophie est dissipée:

Dans l'espace spectral, une cascade d'enstrophie se caractérise par le transfert d'enstrophie vers des échelles de plus en plus petites. La signature de la cascade d'enstrophie dans l'espace physique sera l'accroissement de l'intensité du gradient de vorticité. Il est donc intéressant d'étudier l'équation d'évolution du gradient de vorticité.

Partons de l'équation d'Euler qui n'est autre que (2.5) où viscosité et forçage sont négligés

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega = 0$$

Le gradient de vorticité obéit alors à:

$$(3.4) \quad \frac{d}{dt} \nabla \omega + \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \omega = 0$$

Si, comme McWilliams (1984), on fait l'approximation que $\nabla \mathbf{u}$ évolue lentement en comparaison de $\nabla \omega$, (3.4) aura alors des solutions qui se comporteront comme

$$\nabla \omega \sim \exp \left(\pm \frac{1}{2} Q^{1/2} t \right)$$

où $Q = \det(\nabla \mathbf{u}) = S_1^2 + S_2^2 - \omega^2$ avec

$$S_1 = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$S_2 = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

Le comportement de $\nabla \omega$ sera donc de deux types, suivant le signe de $\det(\nabla \mathbf{u})$:

- 1^{er} cas $Q \geq 0$: $\nabla\omega$ aura tendance à augmenter et donc il y aura cascade. Ce sont les zones où la déformation domine le tourbillon.
- 2^{ème} cas $Q \leq 0$: $|\nabla\omega|$ restera approximativement constant et la cascade a tendance à être inhibée. Ce sont les zones où le tourbillon domine la déformation, essentiellement les zones où l'on voit des tourbillons cohérents.

Nous retiendrons donc principalement que les zones où il y a une cascade d'ensrophie active, et donc les zones où la dissipation d'ensrophie est la plus forte, sont les zones du champ où la déformation domine le tourbillon.

C'est en se basant sur ce constat que nous avons testé, de manière non exhaustive, les différents temps caractéristiques θ suivants:

$$(3.5) \quad \theta = a \frac{\sqrt{S_1^2 + S_2^2}}{Z\sqrt{2}}$$

$$(3.6) \quad \theta = a Z^{-1/2} \frac{S_1^2 + S_2^2}{\omega^2}$$

$$(3.7) \quad \theta = a Z^{-1/2} \frac{\sqrt{S_1^2 + S_2^2}}{|\omega|}$$

$$(3.8) \quad \theta = a \frac{\sqrt{2}}{\omega}$$

Les résultats obtenus ont malheureusement été très décevants dans la mesure où l'on n'a jamais pu trouver une valeur correcte de a . En effet, dans tous les cas on a constaté que $\beta < \alpha$, c'est-à-dire que la valeur maximale possible de a , imposée par le pas de temps, correspond encore à une valeur trop faible de a pour laquelle l'APVM n'agit pratiquement pas (pas de dissipation).

On est donc arrivé au résultat inverse de celui escompté, et ceci s'explique assez bien *a posteriori* car on vérifie expérimentalement que, même en adoptant une valeur de θ uniforme dans l'espace physique, la dissipation APVM, mesurée par la quantité $\omega J(\psi, \theta, \Delta^P[J(\psi, \omega)])$, est maximale aux mêmes endroits que ceux où la déformation domine le tourbillon. Il s'en suit qu'en adoptant les choix 3.5 à 3.8, pour obtenir une même dissipation globale d'ensrophie, on intensifie localement beaucoup trop le terme non linéaire de dissipation

APVM, ce qui fait diverger le modèle alors même que les valeurs de a sont encore beaucoup trop faibles pour que la dissipation globale d'enstrophie soit décelable.

Il s'est donc avéré que l'APVM utilisé avec le temps caractéristique global $\theta = aZ^{-1/2}$ présenté initialement, est en fait très satisfaisant du point de vue des zones de l'espace physique où l'enstrophie est dissipée. C'est pourquoi nous l'avons conservé dans toutes les expériences présentées ultérieurement.

3.4.2 Modélisation de la cascade inverse d'énergie: résultats expérimentaux

Pour les raisons exposées dans la partie précédente (§3.4.1), toutes les expériences que j'ai réalisées sur la cascade inverse d'énergie, utilisent la méthode APVM avec temps caractéristique θ homogène, lié à l'enstrophie moyenne Z . Dans ces simulations numériques, nous résolvons donc de manière approchée l'équation (3.3) à laquelle nous adjoignons un terme dit de friction de Rayleigh, destiné à "pomper" à grande échelle l'énergie excédentaire due au forçage. Notre écoulement est donc modélisé par l'équation:

$$(3.9) \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} + P \left[J(\psi, \omega - \theta \Delta^p [J(\psi, \omega)]) \right] = \text{rot } F + \lambda_f \psi$$

avec $\theta = aZ^{-1/2}$ où la valeur choisie pour a dépend de la résolution, alors que le choix de λ_f dépend lui de la valeur k_I du nombre d'onde de forçage, on a toujours $p=4$.

Deux types d'expériences ont été réalisés, selon le nombre d'onde auquel est effectué le forçage.

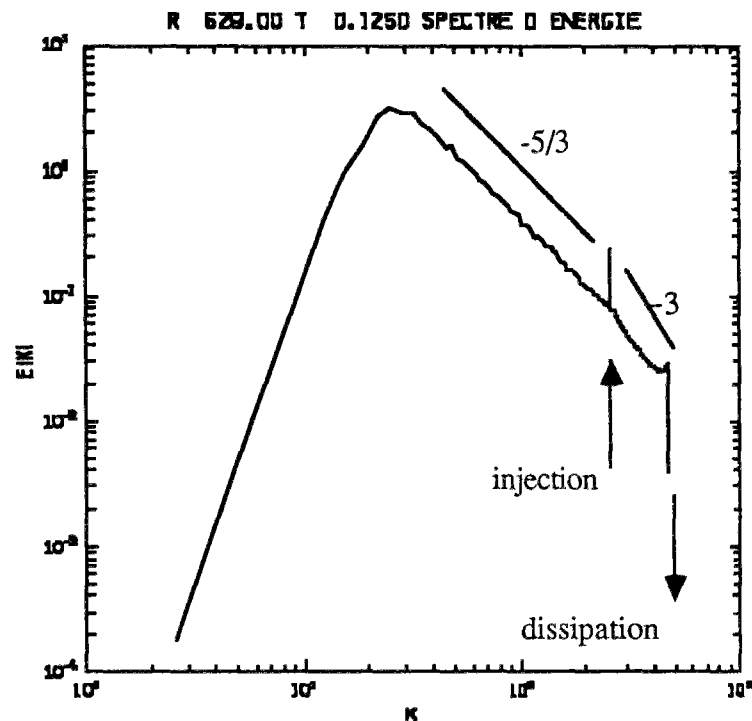
3.4.2.1 Forçage au nombre d'onde 40 (expériences de dispersion relative)

Une première série d'expériences a été effectuée avec un forçage au nombre d'onde 40, il s'agit des expériences de dispersion relative présentées en Annexe 3, dans l'article au Journal of Fluid Mechanics. Plusieurs résolutions ont été adoptées, selon l'importance que l'on voulait donner à la cascade d'enstrophie. Ainsi quand on a voulu étudier la dispersion de paires de particules initialement très proches (D_0 très petit - voir §4.3.2), on a été obligé de pousser la résolution assez loin pour simuler correctement les petites échelles correspondantes de l'écoulement. On a ainsi adopté des résolutions de 256^2 , puis de 1024^2 et enfin de 1728^2 dans l'un des cas. Les résultats obtenus dans la cascade inverse d'énergie sont présentés en Annexe 3.

3.4.2.2 Forçage au nombre d'onde 256

Afin d'obtenir une description détaillée de la cascade inverse d'énergie, j'ai réalisé des expériences avec un forçage à assez grand nombre d'onde: $k_f=256$, dans une résolution de 1024^2 , dans le but d'analyser de manière plus fine les caractéristiques, cette fois-ci eulériennes, de l'écoulement. Plusieurs caractéristiques vont donc être présentées, d'abord le spectre d'énergie, puis les flux d'énergie et d'ensrophie et enfin les champs de tourbillon et de fonction de courant.

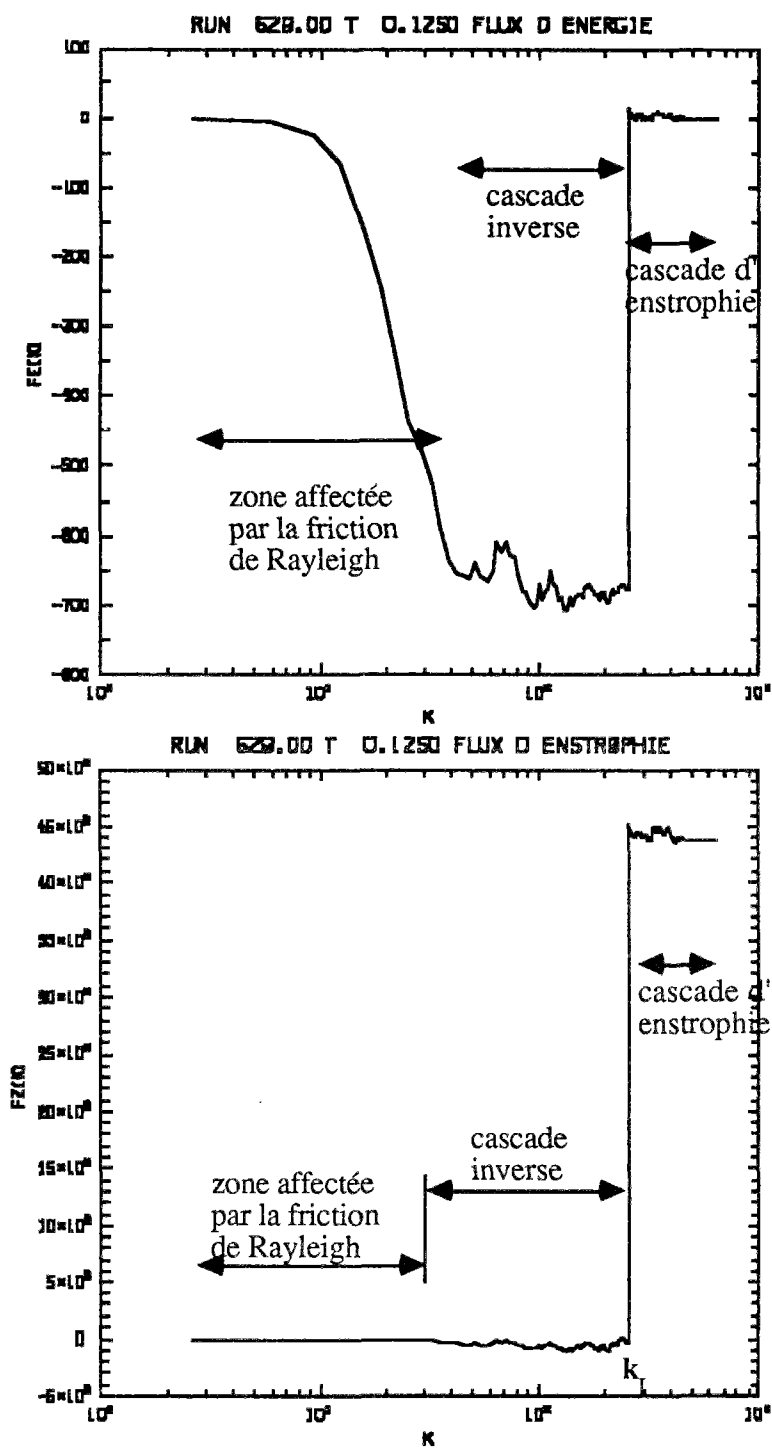
3.4.2.2.1 Spectre d'énergie



On s'aperçoit que l'on n'est pas très loin des comportements prévus par Kraichnan (1967) et Leith (1968) puisque dans la cascade inverse ($k < k_f$) le spectre d'énergie est très proche de la pente représentant $E(k) \sim k^{-5/3}$, tracée sur ce graphique.

3.4.2.2.2 Flux d'énergie et d'ensrophie

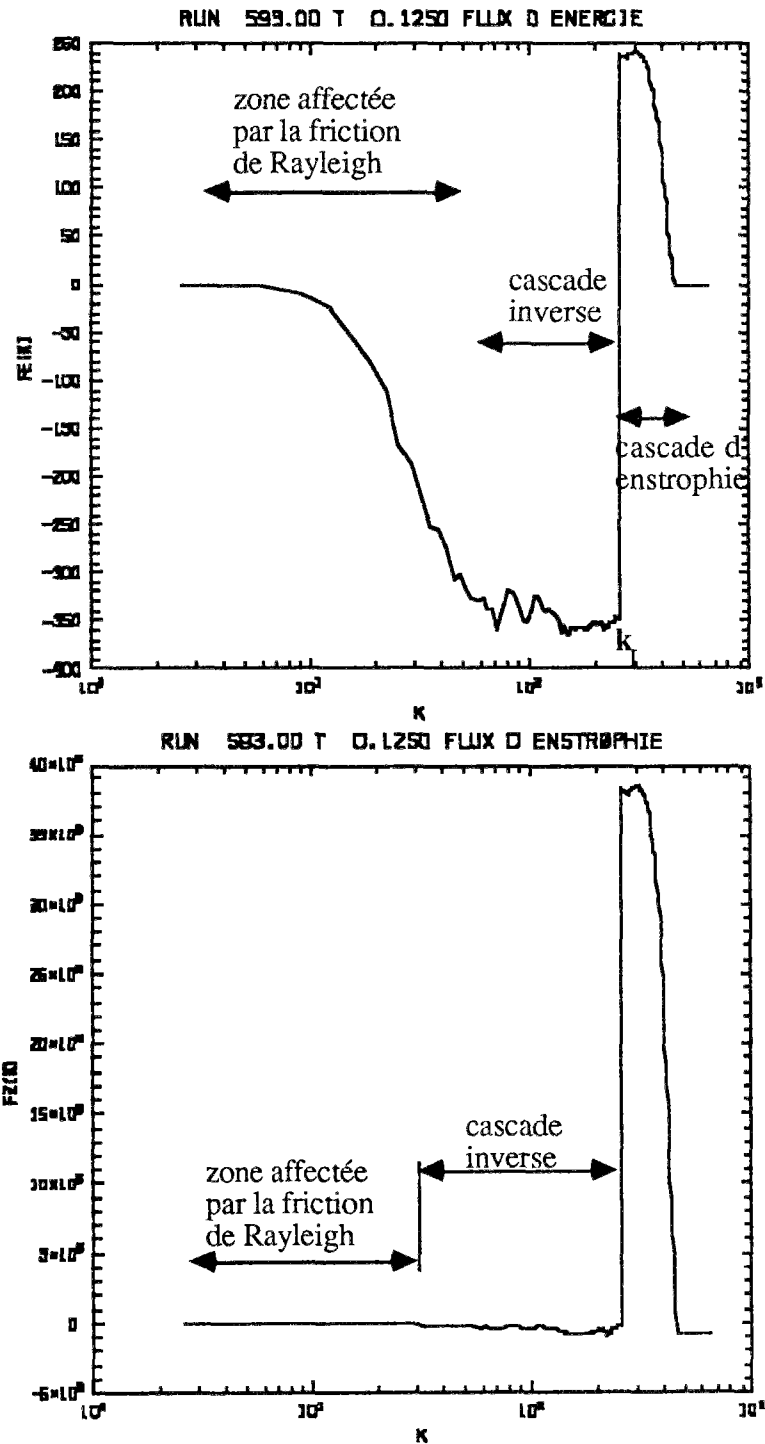
Les flux d'énergie et d'ensrophie représentent respectivement les taux ε d'énergie et η d'ensrophie, transférés au travers d'une échelle donnée par le terme inertiel de l'équation de Navier Stokes. Quand ils sont positifs le transfert est direct (vers des échelles plus petites), il est inverse (vers des échelles plus grandes) quand les taux sont négatifs. Quand un état de régime statistiquement stationnaire est atteint, ces taux sont indépendants du nombre d'onde k à l'intérieur d'une cascade ou zone inertielle donnée (voir §2.3.2). Les résultats obtenus sont les suivants:



Ces flux instantanés mesurés expérimentalement sont en très bon accord avec les prévisions de Kraichnan (1967) et Leith (1968) puisque l'on retrouve des flux constants dans chaque cascade, nuls pour l'énergie dans la cascade d'entrophie et pour l'entrophie dans la cascade inverse; et avec les bons signes ailleurs.

Ces résultats sont très encourageants sur la qualité de la simulation car ils indiquent que les transferts d'énergie et d'entrophie s'effectuent correctement.

Enfin, il est intéressant de noter que pour obtenir ces résultats, nous avons absolument eu besoin d'utiliser la méthode APVM. En effet, comme on le voit ci-dessous,



la même expérience réalisée avec un laplacien itéré 8 fois, montre que cette méthode est inadaptée au cas présent d'une échelle de forçage assez proche de la troncature: les flux obtenus sont de mauvaise qualité, surtout dans la cascade d'entrophie où les flux d'énergie sont loin d'être nuls, puisqu'ils sont de l'ordre de la moitié (en valeur) de ceux observés dans la

cascade inverse. Ceci met en évidence le fait que la cascade d'entrophie est ici beaucoup trop réduite pour utiliser un laplacien itéré, qui exigerait en fait, une résolution beaucoup plus élevée, au moins 2048^2 , comme nous l'annoncions au début de ce chapitre.

3.4.2.2.3 Champs de tourbillon et de fonction de courant

Enfin, pour terminer, nous comparons les champs de tourbillon et fonction de courant obtenus ici avec un forçage au nombre d'onde 256 avec les mêmes champs quand le forçage est effectué au nombre d'onde 10. Pour faciliter cette comparaison nous prenons des champs de même taille physique (i.e. de même taille si l'on dimensionne les longueurs en se référant à l'échelle du forçage). Ainsi les champs forcés à 10 sont pris dans leur intégralité tandis que l'on a dû extraire des champs forcés à 256, des sous domaines 25,6 fois plus petits. De ce fait, ces sous domaines (non périodiques) n'ont que 40 mailles de côté ce qui explique la moins bonne qualité des graphiques.

Comme on peut le voir sur les figures au dos, cette confrontation met en évidence:

i) pour le tourbillon

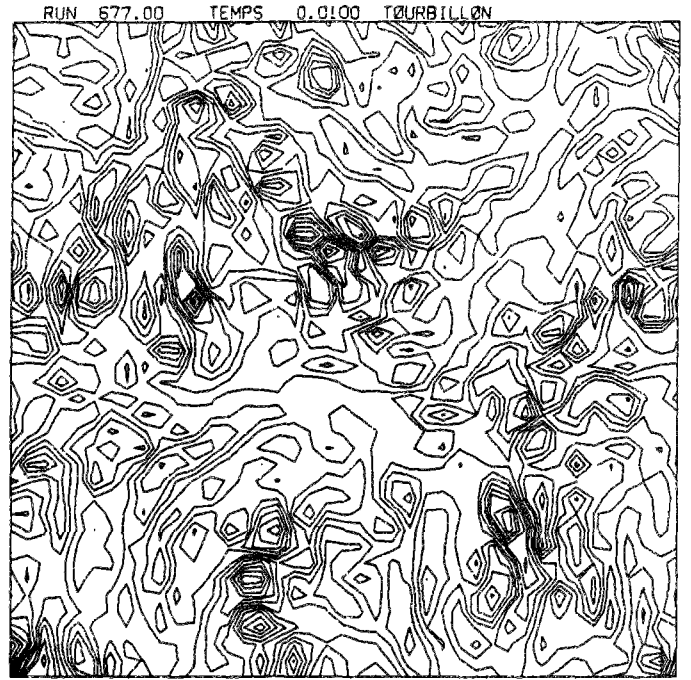
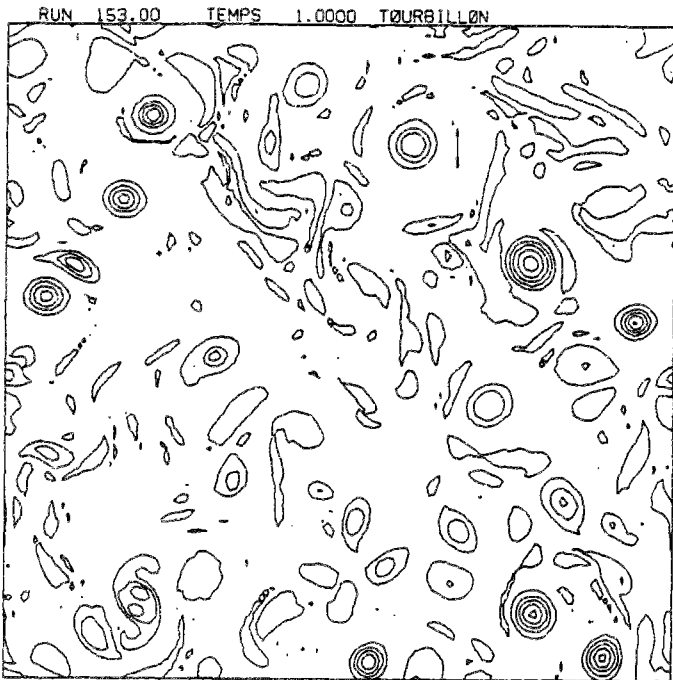
que les structures du tourbillon ont la même taille, elles ne sont pas affectées par l'importance de la cascade inverse; ceci correspond au fait que le maximum du spectre d'entrophie se situe au niveau du forçage, et donc à la même échelle physique dans les deux cas.

ii) pour la fonction de courant

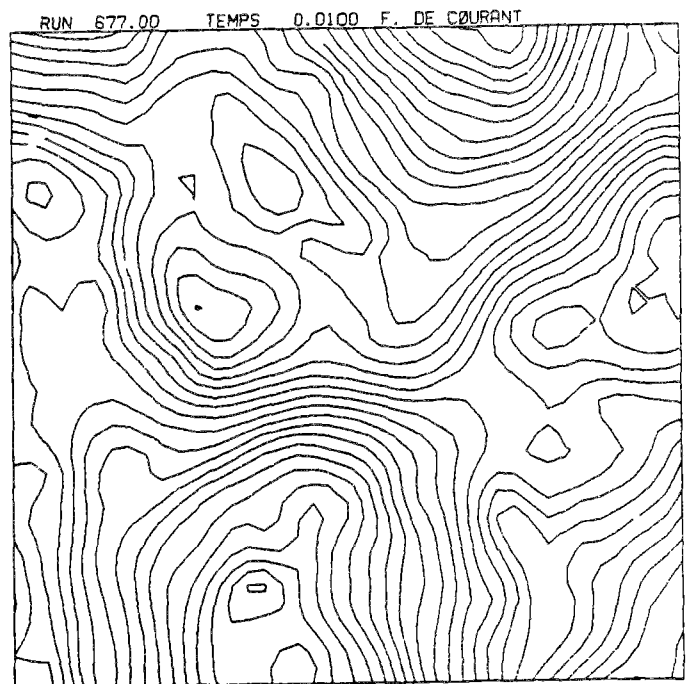
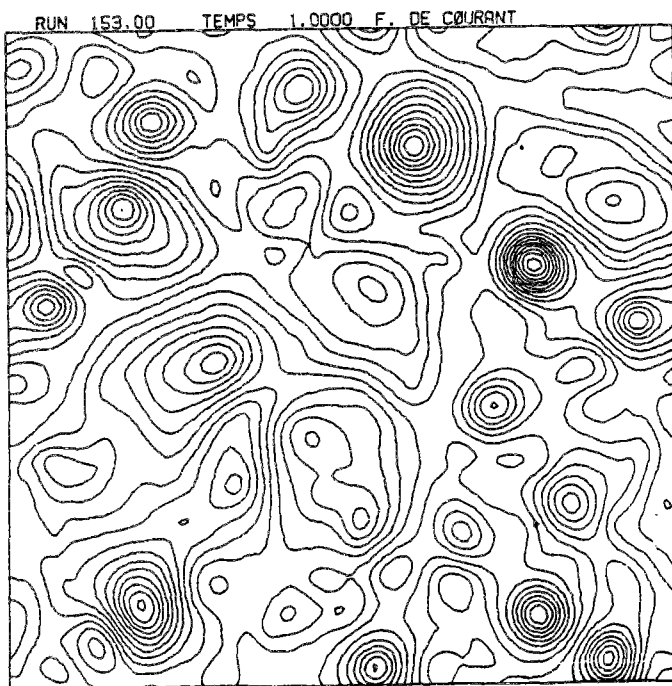
que les structures de fonction de courant sont par contre nettement plus grandes dans le cas d'une cascade inverse large; ici, au contraire, ceci est dû au fait que le maximum du spectre d'énergie, qui se situe aux plus petits nombres d'onde, correspond à des échelles physiques (dimensionnées par rapport à l'échelle de forçage) beaucoup plus grandes dans le cas d'une cascade inverse large.

Il résulte de ceci qu'il est certain qu'il n'existe pas de structure cohérente d'échelle plus grande que celle du forçage. En effet, une structure cohérente se caractérise, Couder *et al.* (1986), par un lien fonctionnel entre la fonction de courant et le tourbillon, qui, comme on vient de le voir, a des structures dont l'échelle ne peut dépasser celle du forçage.

Les mécanismes physiques liés à la cascade inverse d'énergie ne peuvent donc pas trouver leur origine dans les appariements de structures cohérentes qui, de cette manière,



Champs de tourbillon . A gauche forcé à $k=10$, a droite forcé à $k=256$



Champs de fonction de courant . A gauche forcé à $k=10$, à droite forcé à $k=256$

s'élargiraient, expliquant ainsi une répartition de l'énergie sur des échelles de plus en plus grandes.

La compréhension réelle des mécanismes physiques à l'origine de la cascade inverse d'énergie, exige donc de pousser beaucoup plus loin les études et expériences entamées ici.

4. Approche lagrangienne de la turbulence bidimensionnelle

4.1 Introduction, motivations

L'approche lagrangienne de la dynamique d'un écoulement consiste à s'intéresser au comportement d'une grandeur mesurée au cours du temps, le long de la trajectoire d'une particule fluide, plutôt qu'en un point fixe de l'écoulement (approche eulérienne).

Historiquement, l'approche lagrangienne a été étudiée dans le but de mieux connaître la dispersion de taches, par exemple une nappe de pétrole dans l'océan ou un nuage toxique dans l'atmosphère. On s'est également beaucoup intéressé à la dispersion dans le but de mieux connaître les coefficients de dispersion, car ceux-ci, moyennant certaines approximations du type longueur de mélange, Prandtl (1925), constituent les termes qui prennent en compte la turbulence dans les équations de Navier Stokes "moyennées".

Ces dernières années l'intérêt des écoulements géophysiques pour l'approche lagrangienne s'est accru en raison du fait que l'étude *in situ* des écoulements océaniques ou atmosphériques se fait de plus en plus au moyen de flotteurs lagrangiens qui suivent l'écoulement. L'utilisation croissante de ces techniques (ballons dans l'atmosphère, bouées dérivantes dans l'océan) vient de ce qu'elles ont beaucoup progressé et utilisent notamment les moyens satellitaires (ARGOS, SOFAR, RAFOS...).

En parallèle, le développement des simulations numériques permet de mettre au point des expériences "fines" dans lesquelles des flotteurs lagrangiens sont advectés (méthode décrite au §4.2) par un écoulement simulé par un modèle numérique (pour moi celui de turbulence bidimensionnelle du LMD).

Tous ces progrès doivent nous permettre de progresser dans le sens d'une meilleure connaissance des grandeurs observables dans l'espace physique (voir §2.4).

L'information que l'on peut extraire d'expériences lagrangiennes est extrêmement diverse, l'aspect le plus frappant est certainement la grande dispersion des flotteurs entraînés dans un écoulement turbulent. Caractéristique des écoulements turbulents, cette forte dispersion, dite turbulente, a été beaucoup étudiée, notamment par le biais des lois statistiques de dispersion. On espérait en particulier (voir §4.3) qu'elle permettrait d'identifier la dynamique de l'écoulement. Ainsi dans le cas de la turbulence bidimensionnelle, des conjectures à base phénoménologiques permettaient d'associer telle loi de dispersion à la cascade inverse d'énergie, Richardson (1926), et telle autre à celle d'ensrophie, Lin (1972).

Dans nos simulations, nous confrontons nos résultats à ces lois de dispersion dont nous clarifions le comportement réel (§4.3 et Annexes 1 à 3). Nous proposons d'étudier la dispersion sur des bases cinématiques simples (§4.4), beaucoup plus naturelles que les conjectures phénoménologiques (dimensionnelles) ou statistiques (autosimilaires), qui étaient généralement irréalistes ou invérifiables.

Auparavant voici donc une présentation de la manière dont j'ai simulé l'advection des flotteurs lagrangiens.

4.2 Simulation numérique de l'advection des flotteurs lagrangiens

Supposons que nous connaissions au pas de temps $t_n = n \cdot \Delta t$:

- la position $\mathbf{X}(t_n)$ d'un flotteur lagrangien,
- le champ eulérien de vitesse $\mathbf{V}(\mathbf{x}, t_n)$, i.e. en tout point grille du modèle.

Adveciter ce flotteur consiste à déterminer sa nouvelle position $\mathbf{X}(t_{n+1})$ un pas de temps Δt plus tard.

4.2.1 Choix d'un schéma temporel

La méthode la plus simple consiste à adopter un schéma temporel d'ordre 1, dit d'Euler, qui s'écrit:

$$\mathbf{X}(t_{n+1}) = \mathbf{X}(t_n) + \Delta t \cdot \mathbf{V}(\mathbf{X}(t_n), t_n) ;$$

c'est la méthode que nous utilisons en Annexe 1 dans l'article sur la dispersion absolue.

Dans les Annexe 2 et Annexe 3 qui concernent la dispersion relative, nous utilisons un schéma plus élaboré, d'ordre 2, il s'agit d'un des schémas du type Runge-Kutta d'ordre 2 (RK2), Todd (1962), et dont l'expression est:

$$\mathbf{X}(t_{n+1}) = \mathbf{X}(t_n) + \frac{\Delta t}{2} [\mathbf{V}(\mathbf{X}(t_n), t_n) + \mathbf{V}(\mathbf{X}_1(t_{n+1}), t_n)]$$

où $\mathbf{X}_1(t_{n+1}) = \mathbf{X}(t_n) + \Delta t \cdot \mathbf{V}(\mathbf{X}(t_n), t_n)$ est la nouvelle position qu'aurait le flotteur si l'on avait utilisé le schéma d'Euler.

Le choix de la méthode RK2 s'est avéré tellement meilleur, que maintenant nous l'utilisons systématiquement. Si nous ne l'avions pas effectué pour l'Annexe 1 c'est parcequ'au vu des tests préliminaires, le schéma d'Euler nous avait semblé être largement suffisant. Et en effet, concernant les résultats qui nous intéressaient, nous avons pu montrer (voir le chapitre 5 de l'article) que la précision du schéma était suffisante.

Néanmoins, nous avons pu mettre en évidence certaines carences graves du schéma d'Euler, principalement dues au fait qu'étant d'ordre 1 en temps, ce schéma ne prend pas en compte la courbure de la trajectoire (puisqu'il prend la tangente). Ce défaut devient particulièrement aigu dans le cas où le flotteur est sensé tourner autour d'un tourbillon intense et stable, structure dont on a vu l'importance pour la dynamique de la turbulence bidimensionnelle. En effet, dans ces conditions et avec le schéma d'Euler, du fait qu'il doit suivre pendant longtemps une trajectoire très courbe, le flotteur va progressivement être éjecté du tourbillon, alors que sa véritable trajectoire demeure interne au tourbillon.

Nous avons pu mettre en évidence ce problème en nous plaçant dans le cas simplifié d'un champ eulérien figé, i.e. qui n'évolue pas dans le temps. Nous avons alors placé un flotteur au sein d'une structure circulaire; dans ces conditions, les lignes de courant que doit suivre le flotteur, se referment et celui-ci doit périodiquement retrouver sa position initiale.

C'est ce que nous avons testé en mesurant l'évolution au cours du temps du carré $A^2(t)$ de la norme du déplacement d'un flotteur, présentée à la figure 10 de l'Annexe 3. En pointillés c'est le schéma d'Euler qui est utilisé, en trait continu le schéma RK2. On constate de manière claire que ce n'est qu'avec le schéma RK2 que $A^2(t)$ revient périodiquement à zéro, alors qu'avec le schéma d'Euler $A^2(t)$ ne revient jamais à zéro et au contraire croît en moyenne, traduisant ainsi l'éjection progressive et artificielle du flotteur vers l'extérieur du tourbillon.

C'est pourquoi, une fois ce test simple effectué, nous avons préféré adopter définitivement le schéma RK2, particulièrement pour la dispersion relative pour laquelle l'étude des déplacements relatifs, exige plus de précision que pour les déplacements absolus.

4.2.2 Méthode d'interpolation

Que ce soit pour le schéma d'Euler ou de RK2, on constate qu'il faut dans le deux cas, déterminer la vitesse en des points $\mathbf{X}(t_n)$ et $\mathbf{X}_1(t_{n+1})$ qui ont toutes les chances de ne pas être des points de grille. Or ces derniers points sont les seuls où le champ de vitesse est connu. Pour déterminer la vitesse aux points $\mathbf{X}(t_n)$ et $\mathbf{X}_1(t_{n+1})$ il est donc nécessaire d'utiliser une méthode d'interpolation.

Pour ce faire nous avons utilisé une interpolation du type bilinéaire, c'est-à-dire linéaire dans chacune des deux directions d'espace.

Cette méthode, qui est la plus simple, nous a donné entière satisfaction, y compris dans le cas test présenté au §4.2.1 précédent.

Nous étudions actuellement d'autres méthodes basées sur les splines bidimensionnelles, De Boor (1978) et Abgrall (1987), particulièrement précises et performantes dans le cas de champs périodiques comme les nôtres. Ces méthodes permettent d'assurer le degré de continuité que l'on désire à la fonction interpolée, ce qui devient nécessaire dès que l'on s'intéresse à des grandeurs qui dépendent des dérivées spatiales du champ connu sur la grille (par exemple l'accélération d'une particule). La méthode bilinéaire assure simplement la continuité de la fonction interpolée mais comme nous l'avons vu, ceci suffit amplement pour bien advecter une particule.

4.3 Contribution à l'étude de la dispersion turbulente

La dispersion turbulente est abordée soit sous l'angle de la dispersion absolue soit sous celui de la dispersion relative. La dispersion absolue s'intéresse au déplacement des particules fluides par rapport à leur origine, tandis que la dispersion relative s'intéresse à l'évolution des particules les unes par rapport aux autres.

Pour l'observateur qui s'intéresse à la composante turbulente de l'écoulement, la différence essentielle entre ces deux approches, vient de ce que dans le cas de la dispersion absolue, il a besoin de connaître la composante moyenne de l'écoulement (ce qui est long et difficile), alors que pour la dispersion relative, il peut s'en passer, tout au moins dans le cas homogène.

Autre différence importante, seule la dispersion absolue permet de remonter de manière rigoureuse à des grandeurs comme la fonction de structure lagrangienne (définie à la relation 5 de l'Annexe 1) et le spectre lagrangien d'énergie (défini à la relation 22 de l'Annexe 1).

Ces différences expliquent qu'historiquement il y ait eu une grande divergence dans les approches analytiques et les outils développés pour étudier ces deux types de dispersion:

- approche rigoureuse de la dispersion absolue par Taylor (1921) et Batchelor (1949);
- approche dépendant d'arguments dimensionnels ou autosimilaires (liens avec le spectre d'énergie) pour la dispersion relative, Lin (1972).

Dans une partie ultérieure (§4.4) nous présentons un outil mathématique commun aux dispersions absolue et relative, qui pose les bases de leur étude rigoureuse à partir des champs de vitesse et accélération.

4.3.1 Dispersion absolue

Les relations 18 et 24 de l'Annexe 1 montrent que la dispersion absolue est reliée de manière rigoureuse aux caractéristiques lagrangiennes usuelles: corrélation lagrangienne, fonction de structure lagrangienne, spectre lagrangien d'énergie. Ceci a permis des développements analytiques basés sur les modèles théoriques de Taylor (1921), Kampé de Fériet (1939) et Batchelor (1949), qui ont donné les tendances asymptotiques de la dispersion absolue pour des temps de dispersion tendant vers zéro ou l'infini.

L'article sur la dispersion absolue, publié en commun avec A. Babiano, C. Basdevant et R. Sadourny au Journal of Marine Research est présenté en Annexe 1. Dans cet article nous apportons des réponses aux deux principales questions soulevées par l'étude de la dispersion absolue:

- i) comment expliquer que les comportements asymptotiques ($t \rightarrow 0$) soient observés pendant des durées assez longues, allant jusqu'à l'échelle intégrale lagrangienne T_L définie dans l'Annexe 1 (11);
- ii) à quelles grandeurs statistiques est relié le coefficient K de dispersion à grande échelle de temps.

On met en évidence un principe d'indétermination analogue à celui présenté dans le cas eulérien par Babiano *et al.* (1985) et au §2.4; ici il s'agit de l'indétermination pratique du spectre lagrangien d'énergie $L(\omega)$ à partir des mesures de dispersion absolue, dès que le spectre est plus pentu que ω^{-1} ; ce cas est très général et englobe même celui de la turbulence tridimensionnelle. Ce principe permet entre autre d'expliquer le prolongement des comportements asymptotiques noté en i).

Dans certaines expériences océaniques lagrangiennes, les valeurs mesurées de l'échelle intégrale lagrangienne T_L sont sensiblement constantes, de l'ordre de 10-12 jours, pour des valeurs assez différentes de l'énergie turbulente caractéristique, comprises entre 2,5 et 60 cm^2/s^2 . L'approche que nous proposons en Annexe 1 va à l'encontre de cette idée; en fait, nous montrons que T_L est lié à l'enstrophie moyenne Z ce qui conduit, pour le coefficient de dispersion à grande échelle de temps, à l'estimation $K \sim E Z^{-1/2}$, où E est l'énergie cinétique moyenne, constante dans le cadre d'une turbulence entretenue. Ces résultats théoriques, confirmés par nos expériences numériques, sont également bien vérifiés par les expériences numériques réalisées par L. Frossard (1986) sur le modèle quasi-géostrophique de B. L. Hua, dans différents cas de forçage et stratification.

4.3.2 Dispersion relative

Comme nous l'avons vu, l'essentiel des résultats sur l'évolution temporelle de la dispersion relative, utilise des hypothèses phénoménologiques. Partant de la relation (7) de l'Annexe 3, qui donne le coefficient de dispersion sous la forme $Y(t) = \langle D(t) \cdot \delta V(t) \rangle$, les théories autosimilaires permettent d'exprimer Y selon l'allure du spectre eulérien d'énergie, conduisant aux deux comportements classiques:

$$Y(t) \sim D^{4/3}(t) \quad \text{dans la cascade inverse d'énergie,}$$

$$Y(t) \sim D^2(t) \quad \text{dans la cascade d'enstrophie.}$$

De part sa définition $Y(t) = \frac{1}{2} \frac{dD^2}{dt}$, ces relations s'intègrent sous la forme des lois temporelles suivantes:

$$Y(t) \sim \exp(\alpha t) \quad \text{dans la cascade inverse, Richardson (1926);}$$

$$Y(t) \sim t^3 \quad \text{dans la cascade d'enstrophie, Lin (1972).}$$

Le comportement du coefficient de dispersion relative $Y(t)$ est très différent d'un autre coefficient de dispersion relative, dit instantané: $X(D)$, défini en Annexe 3 (11-12), qui traduit le pouvoir dispersif instantané moyen d'un écoulement à une échelle donnée D .

En effet, comme le montre la relation (12) de l'Annexe 3, le lien de $X(D)$ avec la fonction de structure eulérienne est ici rigoureux; ceci permet un lien rigoureux avec le spectre d'énergie (relations (15) de l'annexe 3), sans nécessité de recourir aux théories phénoménologique ou autosimilaire. Par contre, la définition de $X(D)$ ne permet pas de remonter à l'évolution temporelle de la dispersion relative car la relation (11) de l'Annexe 3 n'est pas intégrable.

Connaître de manière rigoureuse l'évolution temporelle de la dispersion relative, pour éventuellement justifier ou au contraire mettre en défaut les lois de Lin (1972) et Richardson (1926), est donc un problème très délicat. Jusqu'à présent toutes les tentatives pour y parvenir sont basées sur des hypothèses souvent invérifiables; la proposition de Lin *et al.* (1963) semble néanmoins la plus saine dans la mesure où ils dégagent de manière claire le fait que pour être vérifiée, la loi de Richardson (1926) exige que les corrélations d'accéléérations relatives soient statistiquement stationnaires (voir §4.4 et Annexes 2 et 3).

Sur ces sujets, une Note aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences est publiée en collaboration avec A. Babiano et présentée en Annexe 2, tandis qu'un article en collaboration avec A. Babiano, C. Basdevant et R. Sadourny est soumis au Journal of Fluid Mechanics et présenté en Annexe 3. Les problèmes qui viennent d'être évoqués y sont abordés en détail, en particulier l'observation ou non des lois de Lin (1972) et Richardson (1926); des résultats d'expériences numériques précises sont donnés et des analyses théoriques mettant notamment en avant le rôle des termes instationnaires, sont proposées.

Comme nous l'annoncions précédemment, voici maintenant une méthode rigoureuse qui pose une base commune à l'étude des dispersions absolue et relative, où le rôle des termes instationnaires, dans le cas de la dispersion relative, est clairement mis en évidence, contrairement au cas de la dispersion absolue où ils n'apparaissent pas.

4.4 Étude de la dispersion sur des bases cinématiques

Conformément à ce que nous annoncions en début de chapitre, voici la méthode qui nous semble la plus adaptée et la plus objective pour aborder les dispersions tant absolue que relative. Nous évitons de faire des hypothèses simplificatrices et invérifiables en partant des relations les plus simples de la cinématique, liant position, vitesse et accélération d'une particule fluide.

Dans un premier temps, les deux types de dispersion peuvent être étudiés de la même manière. Concernant cette première phase nous présenterons l'analyse de la dispersion absolue que l'on généralisera facilement à la dispersion relative.

Soit une particule fluide repérée par sa coordonnée lagrangienne a (position initiale). A tout instant t on désignera par:

- $A(a,t)$ son vecteur déplacement,
- $V(a,t)$ son vecteur vitesse,
- $\Gamma(a,t)$ son vecteur accélération.

Ces grandeurs sont liées par les relations suivantes

$$(4.1) \quad A(a,t) = \int_0^t V(a,\tau) d\tau$$

$$(4.2) \quad \Gamma(\mathbf{a}, t) = \frac{d}{dt} [\mathbf{V}(\mathbf{a}, t)]$$

Ces relations nous permettent d'aboutir à une équation différentielle qui gouverne la dispersion absolue, en procédant comme suit:

De (4.1) on déduit:

$$\| \mathbf{A}(\mathbf{a}, t) \|^2 = \left\| \int_0^t \mathbf{V}(\mathbf{a}, \tau) d\tau \right\|^2$$

qui donne

$$(4.3) \quad t \frac{d}{dt} \|\mathbf{A}\|^2 = 2 t \mathbf{V}(\mathbf{a}, t) \int_0^t \mathbf{V}(\mathbf{a}, \tau) d\tau$$

D'autre part, en intégrant par partie on a:

$$(4.4) \quad \int_0^t \mathbf{V}(\mathbf{a}, \tau) d\tau = t \mathbf{V}(\mathbf{a}, t) - \int_0^t \tau \Gamma(\mathbf{a}, \tau) d\tau$$

que l'on injecte dans (4.3):

$$t \frac{d}{dt} \|\mathbf{A}\|^2 = \left[t \mathbf{V}(\mathbf{a}, t) + \int_0^t \tau \Gamma(\mathbf{a}, \tau) d\tau + \int_0^t \mathbf{V}(\mathbf{a}, \tau) d\tau \right] \int_0^t \mathbf{V}(\mathbf{a}, \tau) d\tau$$

soit,

$$t \frac{d}{dt} \|\mathbf{A}\|^2 = \left[t \mathbf{V}(\mathbf{a}, t) + \int_0^t \tau \Gamma(\mathbf{a}, \tau) d\tau \right] \int_0^t \mathbf{V}(\mathbf{a}, \tau) d\tau + \|\mathbf{A}(\mathbf{a}, t)\|^2$$

utilisant à nouveau (4.5) on obtient:

$$t \frac{d}{dt} \|\mathbf{A}\|^2 - \|\mathbf{A}(\mathbf{a}, t)\|^2 = t^2 \|\mathbf{V}(\mathbf{a}, t)\|^2 - \left\| \int_0^t \tau \Gamma(\mathbf{a}, \tau) d\tau \right\|^2$$

équation différentielle qui gouverne donc l'évolution au cours du temps du déplacement \mathbf{A} d'une particule.

Finalement, si l'on s'intéresse à la moyenne sur un ensemble de flotteurs, notée $\langle . \rangle$, en définissant leur énergie cinétique moyenne $E(t) = \frac{1}{2} \langle \|V(a,t)\|^2 \rangle$ et leur déplacement quadratique moyen $A(t) = \sqrt{\langle \|A(a,t)\|^2 \rangle}$, on obtient l'équation différentielle suivante, qui gouverne la dispersion absolue:

$$(4.5) \quad \frac{d}{dt} A^2 - \frac{A^2(t)}{t} = 2 E(t) t - \frac{\theta_A(t)}{t} \quad \text{où} \quad \theta_A(t) = \langle \left\| \int_0^t \tau \Gamma(a,\tau) d\tau \right\|^2 \rangle$$

Pour la dispersion relative on utilise des paires de particules $P=(a_1, a_2)$ initialement séparées par la distance $D_0 = \|D_0\|$ avec $D_0 = a_1 - a_2$.

A tout instant on définit:

- le vecteur séparation $D(t) = D_0 + [A(a_1, t) - A(a_2, t)]$,
- le vecteur vitesse relative $\delta V(t) = V(a_1, t) - V(a_2, t)$,
- le vecteur accélération relative $\delta \Gamma(t) = \Gamma(a_1, t) - \Gamma(a_2, t)$.

Toutes les relations obtenues plus haut pour la dispersion absolue peuvent également s'écrire pour la dispersion relative, il suffit d'y remplacer

a par P , A par $D - D_0$, V par δV et Γ par $\delta \Gamma$

et l'on obtient donc

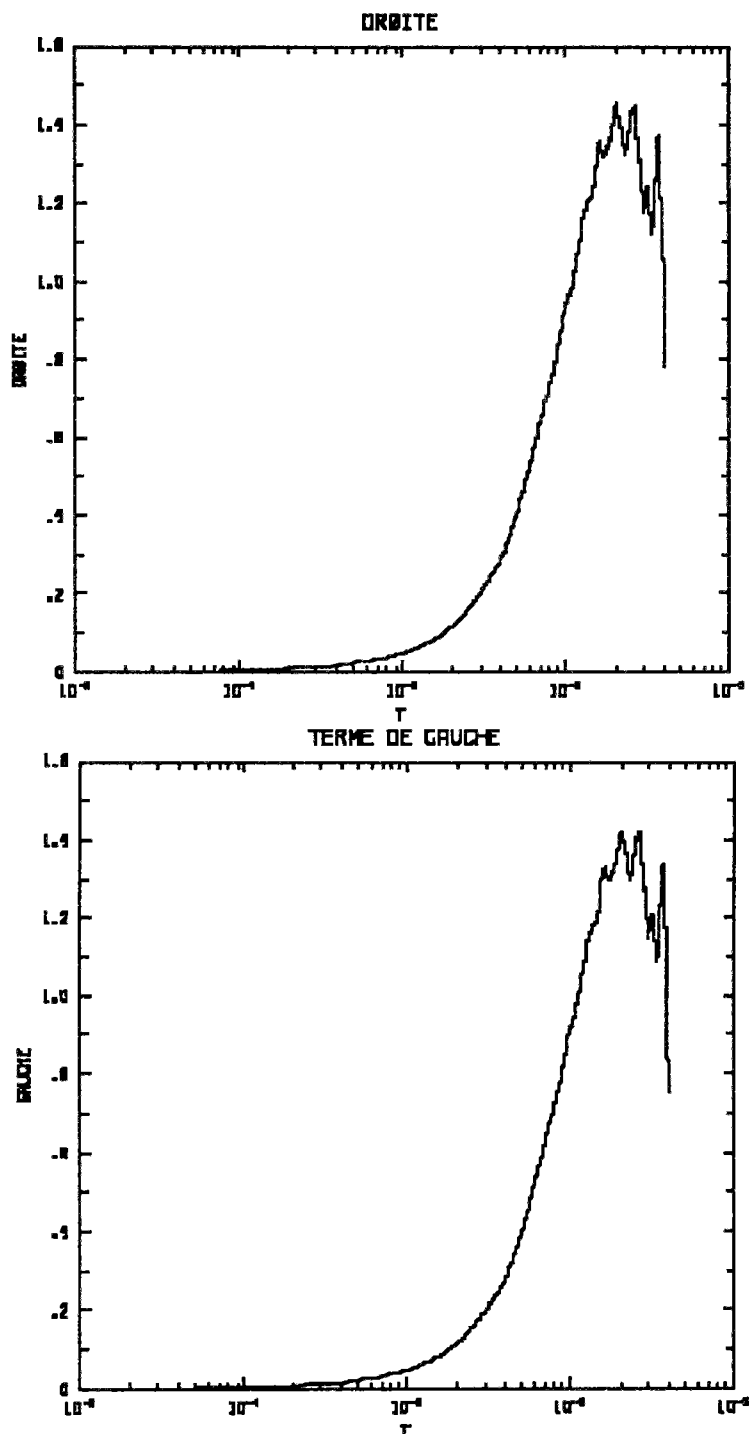
- pour une paire de particules:

$$t \frac{d}{dt} \|D - D_0\|^2 - \frac{\|D(P, t) - D_0\|^2}{t} = t^2 \|\delta V(P, t)\|^2 - \left\| \int_0^t \tau \delta \Gamma(P, \tau) d\tau \right\|^2$$

- en moyenne sur un ensemble de paires de particules ayant toutes le même écart initial D_0 :

$$(4.6) \quad \frac{d}{dt} \langle \|D - D_0\|^2 \rangle - \frac{\langle \|D - D_0\|^2 \rangle(t)}{t} = t \langle \|\delta V\|^2 \rangle(t) - \frac{\theta_R(t)}{t} \quad \text{où} \quad \theta_R(t) = \langle \left\| \int_0^t \tau \delta \Gamma(P, \tau) d\tau \right\|^2 \rangle.$$

Les équations (4.5 et 4.6) sont tout à fait générales et demeurent valables pour n'importe quelle dynamique, qu'elle soit bi- ou tri- dimensionnelle. Dans le contexte bidimensionnel, nous avons testé (4.6) par simulation numérique, le résultat est excellent comme le montre la comparaison des termes de droite et gauche de (4.6) présentés sur cette figure qui correspond à une expérience de résolution 1024^2 forcée au nombre d'onde 256 (pour le détail de ces expériences voir l'Appendice 1 de l'Annexe 3).



Malgré leur similitude, les équations (4.5) et (4.6) conduisent à des comportements très différents pour la dispersion absolue et la dispersion relative. Ceci vient de ce que les termes θ_A et θ_R ont des propriétés opposées. Tout deux mettent en jeu des corrélations d'accélération: $C_A = \langle \Gamma(t)\Gamma(\tau) \rangle$ pour θ_A et $C_R = \langle \delta\Gamma(t)\delta\Gamma(\tau) \rangle$ pour θ_R . Mais autant l'une (C_A) peut s'exprimer en fonction du retard $\sigma = t - \tau$ seul, du moment que la turbulence est statistiquement stationnaire, autant l'autre (C_R) ne peut pas l'être car elle dépend en plus de l'évolution $D(t)$, même si la turbulence est stationnaire.

En d'autres termes, si l'on effectue un décalage temporel θ , on a $\langle \delta\Gamma(t)\delta\Gamma(\tau) \rangle \neq \langle \delta\Gamma(t+\theta)\delta\Gamma(\tau+\theta) \rangle$ car $D(t) \neq D(t+\theta)$ et $D(\tau) \neq D(\tau+\theta)$, alors que ce même décalage temporel θ n'affecte pas C_A car $\langle \Gamma(t)\Gamma(\tau) \rangle$ est insensible à l'évolution de D .

L'existence de ces termes non stationnaires dans (4.6) explique pourquoi la dispersion relative est plus difficile à aborder que la dispersion absolue, le comportement des termes non stationnaires étant très difficile à prévoir.

Ce type d'approche, radicalement différent des approches classiques présentées au §4.3, permet d'aborder de manière plus rigoureuse et avec des hypothèses moins contraignantes et plus réalistes, l'étude des deux domaines de la dispersion: absolue et relative. C'est ce que nous avons fait, plus particulièrement dans l'article sur la dispersion relative, soumis au Journal of Fluid Mechanics et présenté ici en Annexe 3.

5. Étude de la couche de mélange bidimensionnelle

Entre les première et deuxième année de ma thèse, j'ai travaillé comme scientifique du contingent à l'Institut de Mécanique de Grenoble (IMG) au sein de l'équipe "Modélisation de la turbulence" dirigée par Marcel Lesieur.

Pendant cette année, j'ai poursuivi le travail entrepris par C. Staquet concernant la couche de mélange bidimensionnelle. Plus précisément, il s'agit d'un écoulement initialement parallèle à l'axe des x (par exemple) avec, selon y , un profil inflexionnel donné de la vitesse (indépendant de x). On étudie alors les instabilités qui se développent progressivement au sein de ce que l'on appelle la couche de mélange dont l'épaisseur croît au cours du temps de part et d'autre du point d'inflexion du profil initial de vitesse.

C'est ce qui est fait dans l'article présenté en Annexe 4 et résumé ci-dessous; il est accepté au Journal of Fluid Mechanics. La part de mon travail concerne essentiellement tout ce qui est lié au taux d'erreur, à l'interaction turbulence bi- et tri- dimensionnelle et sur le plan technique j'ai développé tous les calculs en résolution 256^2 sur le Cray 1 du Centre de Calcul Vectoriel pour la Recherche (CCVR) et le FPS-264 du Centre Interuniversitaire de Calcul de Grenoble, ainsi que les visualisations couleurs (images instantanées, animations) sur le matériel Apollo de l'IMG.

Résumé de l'article accepté par le Journal of Fluid Mechanics (présenté en Annexe 4):

Au cours de ce travail, nous avons effectué une simulation numérique bidimensionnelle à grande échelle de la couche de mélange temporelle soumise à une perturbation en bruit blanc. On montre que le premier appariement de tourbillons de même signe est à l'origine de la formation d'un spectre longitudinal spatial d'énergie continu, de pente comprise entre k^{-4} et k^{-3} . Après deux appariements successifs, cette extension du domaine spectral dépasse une décade. On montre que l'épaisseur de vorticité, moyenn e sur plusieurs calculs ne différant que par la réalisation du bruit blanc, croît linéairement et, éventuellement, sature. Cette saturation est associée à la taille finie du domaine de calcul. On montre que les grandes échelles, donc spatialement cohérentes, sont extrêmement sensibles aux conditions initiales et donc impr dicibles. On présente la cascade inverse de l'erreur au travers du spectre d'énergie. Selon un point de vue tridimensionnel, on développe une troncature à deux modes du champ de vitesse mettant en jeu un écoulement de base bidimensionnel et une perturbation perpendiculaire en sinus. Cette troncature correspond à une analyse bidimensionnelle de pr dicibilit  où la croissance de l'énergie de l'erreur peut être identifiée à l'énergie cinétique moyenne de la perturbation en sinus. Les simulations numériques avec appariements successifs mettent en évidence une croissance exponentielle de la tridimensionnalité dont la saturation apparaît en

même temps que l'épaisseur de vorticité cesse de croître. En conséquence dans un domaine infini et en présence de perturbations sous harmoniques (qui se trouvent dans le bruit blanc), l'erreur relative (et donc la tridimensionnalité relative) croîtrait exponentiellement, conduisant à une tridimensionnalisation de la couche et une perte de cohérence. Nous indiquons aussi comment une structure cohérente pourrait alors être recr  e, en utilisant une hypothèse de viscosité turbulente et l'instabilité linéaire du cisaillement inflexionel moyen.

6. Conclusion, perspectives

Le modèle de turbulence bidimensionnelle du LMD a été amélioré en mettant au point une simulation correcte de la cascade inverse d'énergie.

Pour ce faire nous avons mis en œuvre la modélisation dite du tourbillon anticipé (APVM) qui simule l'action des échelles sous maille, et nous avons précisé sous quelle forme exacte cette méthode devait être employée (choix d'un temps caractéristique homogène).

Le choix de cette méthode, plus compliquée à mettre en œuvre et légèrement plus coûteuse, nous a été très profitable pour modéliser correctement la cascade inverse. En effet, elle a non seulement permis d'améliorer la qualité de la simulation avec de bons flux d'énergie et d'entrophie, mais elle a également permis de réaliser de substantielles économies, puisque sans la méthode APVM nous aurions dû utiliser une résolution de 2048^2 au lieu des 1024^2 adoptés.

Nos simulations de la cascade inverse d'énergie ont donné des résultats très proches de ceux que l'on attendait, concernant les propriétés spectrales énoncées par Kraichnan (1967) et Leith (1968). Ainsi, dans la cascade inverse, nous obtenons un flux inverse d'énergie important et relativement constant; le flux d'entrophie étant lui proche de zéro. Le spectre d'énergie est voisin de la loi $E(k) \sim k^{-5/3}$ prédite.

Dans l'espace physique les choses sont moins claires, en particulier, on n'observe pas de structure cohérente d'échelle plus grande que celle du forçage.

Cette amélioration de la qualité de la simulation des grandes échelles nous a été très utile pour réaliser différents types d'expérience sur notre modèle.

C'est en particulier le cas des expériences de dispersion relative qui ont ainsi pu être effectuées sur des durées beaucoup plus longues qu'auparavant. Les conséquences sur les résultats sont importantes: on a pu montrer expérimentalement et théoriquement que l'on ne retrouvait pas les lois de Lin (1972) et Richardson (1926) habituellement utilisées pour identifier une turbulence bidimensionnelle et les gammes d'échelles associées à l'une ou l'autre des cascades inertielles.

Perspectives

Suite à l'expérience acquise, plusieurs points me sembleraient intéressants à développer.

Sur la cascade inverse d'énergie: il faudrait comprendre ce qui se passe dans l'espace physique, en particulier les mécanismes physiques associés au transfert "inverse" d'énergie;

l'idée d'appariement de structures cohérentes ne semble pas tenir, que peut-on imaginer d'autre ?

Sur la dispersion: il faudrait comprendre le pourquoi des lois de dispersion (relative) obtenues. Rôle des termes instationnaires, rôle du champ d'accélération. L'utilisation des équations que nous avons dégagées et qui gouvernent la dispersion, devrait y contribuer.

Enfin, il me semble important d'insister sur le caractère très inhomogène de la turbulence bidimensionnelle. Ceci devrait nous inciter à compléter les approches statistiques par une analyse plus détaillée de ce qui se passe dans l'espace physique, comme par exemple le déplacement ou l'interaction forte de tourbillons.

Références bibliographiques

Abgrall R., 1987: Conception d'un modèle semi-lagrangien de turbulence bidimensionnelle, *thèse de doctorat de l'Université de Paris 6*.

Abgrall R. et C. Basdevant, 1987: Un schéma numérique semi-lagrangien pour la turbulence bidimensionnelle, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **305**, 315-318.

Anikiev V.V., O.V. Zaytzev, T.V. Zaytzeva and V.V. Yarosh, 1985, Experimental investigation of the diffusion parameters in the ocean, *Izvestiya Atmospheric and Oceanic Physics*, **21**, N°11, 931-934.

Arakawa A., 1966: Computational design for long-term numerical integration of the equations of fluid motion: two-dimensional incompressible flow, *Journal of Computational Physics*, **1**, 119-143.

Babiano A., C. Basdevant, B. Legras and R. Sadourny, 1987a: Vorticity and passive-scalar dynamics in two-dimensional turbulence, *Journal of Fluid Mechanics*, **183**, 379-397.

Babiano A., C. Basdevant, P. Le Roy and R. Sadourny, 1987b: Single-particle dispersion, Lagrangian structure function and Lagrangian energy spectrum in two-dimensional incompressible turbulence, *Journal of Marine Research*, **45**, 107-131; (article de l' Annexe 1).

Babiano A., C. Basdevant and R. Sadourny, 1985: Structure functions and dispersion laws in two-dimensional turbulence, *Journal of the Atmospheric Sciences*, **42**, 942-949.

Basdevant C., 1981: Contribution à l'étude numérique et théorique de la turbulence bidimensionnelle, *thèse d'état de l'Université Paris 6*.

Basdevant C., 1982: Le modèle de simulation numérique de turbulence bidimensionnelle du L.M.D., *Note Interne LMD*, **114**.

Basdevant C., B. Legras, R. Sadourny and M. Béland, 1981: A study of Barotropic model flows: Intermittency waves and predictability, *Journal of the Atmospheric Sciences*, **38**, 2305-2326.

Basdevant C. and R. Sadourny, 1975: Ergodic properties of inviscid truncated models of two-dimensional incompressible flows, *Journal of Fluid Mechanics*, **69**, 673-688.

Basdevant C. et R. Sadourny, 1983: Modélisation des échelles virtuelles dans la simulation numérique des écoulements turbulents bidimensionnels, *J. Mécan. Théor. et Appl.*, **Numéro Spécial**, 243-270.

Batchelor; G.K., 1949: Diffusion in a field of homogeneous turbulence. *Austr. J. Sci. Res.*, **A2**, 437-450.

Bennett, A.F., 1984: Relative dispersion: local and non-local dynamics, *Journal of the Atmospheric Sciences*, **41**, 1881-1886.

Brachet M.E., M. Meneguzzi, H. Politano and P. Sulem, 1986: Computer simulation of decaying two-dimensional turbulence, *European Turbulence Conference*, Springer-Verlag.

Charney J., 1971: Geostrophic Turbulence, *Journal of the Atmospheric Sciences*, **28**, 1087-1099.

Colin de Verdière A., 1983: Lagrangian eddy statistics from surface drifters in the eastern North Atlantic, *Journal of Marine Research*, **41**, 375-398.

Couder Y., 1984: Two-dimensional grid turbulence in a thin liquid film *J. Phys. Letters*, **45**, 353-360.

Couder Y., C. Basdevant and R. Sadourny, 1986: Vortices and vortex-couples in two-dimensional turbulence or long-lived couples are Batchelor's couples, *La modélisation macroscopique de la turbulence et des mélanges*, Springer-Verlag.

De Boor C., 1978: A practical guide to splines, Volume 27, Springer-Verlag.

Desbois, M., 1975: Large-scale kinetic energy spectra from Eulerian analysis of Eole wind data, *Journal of the Atmospheric Sciences*, **32**, 1838-1847.

Er-El J. and R.L. Peskin, 1981: Relative dispersion of constant-level balloons in the southern hemisphere, *Journal of the Atmospheric Sciences*, **38**, 2264-2274.

Fjørtoft R., 1953: On the changes in the spectral distribution of kinetic energy for twodimensional, non divergent flow, *Tellus*, **5**, 225-230.

Freeland H., P. Rhines and T. Rossby, 1975: Statistical observations of the trajectories of neutrally buoyant floats in the North Atlantic, *Journal of Marine Research*, **33**, 383-404.

Frossard L., 1986: Turbulence quasi-bidimensionnelle stratifiée, dynamique lagrangienne, dispersion absolue, *Notes de travail de l'École Nationale de la Météorologie*.

Frisch U. and P.L. Sulem, 1984: Numerical simulation of the inverse cascade in two-dimensional turbulence, *Phys. fluids*, **27**, 1921-1923.

Hopfinger E.J., F.K. Browand and Y. Gagne, 1982: Turbulence and waves in a rotating tank, *Journal of Fluid Mechanics*, **125**, 505-534.

Kampé de Fériet J., 1939: Les fonctions aléatoires stationnaires et la théorie statistique de la turbulence homogène, *Ann. Soc. Sci. Bruxelles*, **59**, 15-194.

Kolmogorov A.N., 1941: The local structure of turbulence in incompressible fluid at very high Reynolds number, *Dokl. Acad. Sci. U.S.S.R.*, **30**, 299-303.

Kraichnan R.H., 1966: Dispersion of particle pairs in homogeneous turbulence, *Physics of Fluids*, **9**, 1937-1943.

Kraichnan R.H., 1967: Inertial ranges in two-dimensional turbulence, *Physics of Fluids*, **10**, 1417-1423.

Kraichnan R.H., 1976: Eddy viscosity in two and three dimensions, *Journal of the Atmospheric Sciences*, **33**, 1521-1536.

Legras B., P. Santangelo and R. Benzi, 1988: High resolution numerical experiments for forced two-dimensional turbulence, *Europhysics Letters*, **5**, 37-42.

Leith C.E., 1968: Diffusion approximation for two-dimensional turbulence. *Physics of Fluids*, **11**, 671-673.

Lesieur M., 1983: Introduction à la turbulence bidimensionnelle, *J. Mécan. Théor. et Appl.*, Numéro Spécial, 5-20.

- Lin C.C. and W.H. Reid, 1963: Turbulent flow. Theoretical aspects. *Handbuch der Physik*, **Bd VIII/2**, Berlin-Göttingen, Heidelberg, Springer.
- Lin J.T., 1972: Relative dispersion in the enstrophy cascading inertial range of homogeneous two-dimensional turbulence, *Journal of the Atmospheric Sciences*, **29**, 394-396.
- Lorenz E.N., 1969: The predictability of a flow which possesses many scales of motion. *Tellus*, **21**, 289-307.
- McWilliams, J.C., 1984: The emergence of isolated coherent vortices in turbulent flow, *Journal of Fluid Mechanics*, **146**, 21-43.
- Morel P. and M. Larchevêque, 1974: Relative dispersion of constant level balloons in the 200 mb general circulation, *Journal of the Atmospheric Sciences*, **31**, 2189-2196.
- Orzag S.A., 1971: Numerical simulation of incompressible flow within simple boundaries in Galerkin spectral representation, *Studies in applied mathematics*, **50**, 293-327.
- Patterson G. and S.A. Orzag, 1971: Spectral calculation of isotropic turbulence: efficient removal of aliasing error, *Physics of Fluids*, **14**, 2538-2541.
- Pedlosky J., 1979: Geophysical fluid Dynamics. Springer-Verlag.
- Prandtl L., 1925: Bericht über Untersuchungen zur ausgebildeten Turbulenz, *Zs. Angew. Math. Mech.*, **5**, 136-139.
- Price J., 1981: Diffusion statistics computed from SOFAR float trajectories in the Western North Atlantic, *unpublished proceedings of CAMS-WHOI Symposium on Lagrangian Tracers*, Woods Hole.
- Richardson L.F., 1926: Atmospheric diffusion shown on a distance-neighbour graph, *Proc. Roy. Soc.*, **A110**, 709-737.
- Sadourny R. et C. Basdevant, 1981: Une classe d'opérateurs adaptés à la modélisation de la diffusion turbulente en dimension deux, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **292**, 1061-1064.

Sadourny R. and C. Basdevant, 1985: Parameterization of subgrid scale barotropic eddies in quasi-geostrophic models: Anticipated Potential Vorticity Method, *Journal of the Atmospheric Sciences*, **42**, 1353-1363.

Sommeria J. and R. Moreau, 1982: Why, how and when MHD turbulent becomes two dimensional, *Journal of Fluids Mechanics*, **118**, 507-518.

Taylor, G.I., 1921: Diffusion by continuous movements, *Proc. Lond. Math. Soc.*, **20**, 196-212.

Todd J., 1962: Survey of numerical analysis, *McGraw-Hill Book Company*.

Tsinober A.B., 1975: *Maguitnaya Gidrodinamica*, **1**.

Vallis G. and B.L. Hua, 1988: Eddy Viscosity of the Anticipated Potential Vorticity Method, *Journal of the Atmospheric Sciences*, sous presse.

Weiss J., 1981: The dynamic of enstrophy transfert in two dimensional hydrodynamics, *Technical report, La Jolla Institut, La Jolla, California, LJI-TN-81-121*.



Annexe 1: Dispersion absolue, article paru dans le Journal of Marine Research.

Journal of Marine Research, 45, 107–131, 1987

Single-particle dispersion, Lagrangian structure function and Lagrangian energy spectrum in two-dimensional incompressible turbulence

by Armando Babiano,¹ Claude Basdevant,¹ Pascal Le Roy¹ and Robert Sadourny¹

ABSTRACT

The single-particle dispersion, Lagrangian structure functions and Lagrangian energy spectra characteristic of two-dimensional incompressible turbulent flows are investigated theoretically and numerically. The domain of validity of the classical asymptotic estimates is extended; it is shown in particular that the asymptotic behavior of the single-particle dispersion at small times remains valid throughout the whole self-similar range when the Lagrangian energy spectrum is steeper than ω^{-1} . Straightforward estimates of the Lagrangian integral time scale T_L and the diffusion coefficient at large times \mathcal{H} , based on energy and enstrophy, are proposed; to some extent, they remain valid locally, which allows an analysis of the spatial variability of T_L and \mathcal{H} , within a single turbulent field. Finally, the detrimental effect of artificial numerical diffusion on the numerical simulation of Lagrangian statistics is highlighted and discussed.

1. Introduction

Flow measurements by means of Lagrangian tracers are now becoming widely used in dynamic oceanography (see for example Freeland *et al.*, 1975). The synoptic circulation and its quasi-two-dimensional regime will be studied in the near future using such Lagrangian observational techniques sustained by recent advances in buoy technology and localization devices such as the ARGOS Satellite Location and Data Collection System (1978). In relation to these developments, a number of new problems are arising. The aim of the present work is to clarify the kind of information on the macro-turbulent structure of the large-scale oceanic flow to be retrieved from drifting buoy trajectories. More precisely, our main purpose here is to investigate the variability of the eddy diffusion coefficient in a two-dimensional turbulent flow-field containing sporadic coherent vortex concentrations, considered as an elementary model of large-scale oceanic motion; the presence of coherent vortices (McWilliams, 1984; Couder *et al.*, 1984) as well as nonlocality (Bennett, 1984), important consequences for particle dispersion.

First we consider the formulation and theory of Lagrangian statistics in general.

¹. Laboratoire de Météorologie Dynamique du CNRS, Ecole Normale Supérieure, 24, rue Lhomond, 75231 Paris Cedex 05, France.

involving Lagrangian energy spectra and single-particle dispersion, by following closely the approach already used by Babiano *et al.* (1985b)—hereafter referred to as BBS—for Eulerian statistics. We insist on the natural relations between the Lagrangian spectrum, the single-particle dispersion and the diffusion coefficient, which lead to a consistent interpretation of asymptotic behaviors at both small and large times. The Lagrangian time scale is also investigated in terms of its relation to enstrophy; so is the asymptotic value of the diffusion coefficient, related in turn to the proper combination of energy and enstrophy.

The analysis is then followed and sustained by a set of numerical experiments, where ensembles of particles are released in selected areas of a two-dimensional turbulent flow obtained from numerical simulations of the two-dimensional Navier-Stokes equations; the launching areas are selected to provide separate investigations of Lagrangian statistics in the various conditions encountered in such a flow, from strong coherent vortices to weak turbulent surroundings. The problem of numerical diffusion and its impact on the Lagrangian statistics, is addressed.

2. Definitions and relations

We consider the time evolution of the separation of a fluid particle from its initial position in a homogeneous, stationary, zero-mean two-dimensional turbulent velocity field. The squared displacement of the particle identified by its Lagrangian coordinate \mathbf{a} (its position at time $t = 0$) is given by:

$$P^2(\mathbf{a}, t) = \left(\int_0^t \mathbf{V}(\mathbf{a}, \tau) d\tau \right)^2, \quad (1)$$

which leads to

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} P^2(\mathbf{a}, t) = \int_0^t \mathbf{V}(\mathbf{a}, t) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{a}, \tau) d\tau. \quad (2)$$

Relations (1, 2) will be studied in statistical mean, using the average $\langle \cdot \rangle$ over all initial positions \mathbf{a} . We define the single-particle dispersion as

$$A(t) = \langle P^2(\mathbf{a}, t) \rangle. \quad (3)$$

The coefficient of eddy diffusion is then defined by

$$K(t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} A(t). \quad (4)$$

All these definitions can be generalized to tensor notation, but such generality is not needed in the present context.

a. The Lagrangian structure function. Let us recall some definitions and relations involving the second-order Lagrangian structure function. The Lagrangian structure

1987]

Babiano et al.: Single-particle dispersion

109

function is defined as

$$S_L(t) = \frac{1}{2} \langle \|\mathbf{V}(\mathbf{a}, 0) - \mathbf{V}(\mathbf{a}, t)\|^2 \rangle; \quad (5)$$

and the Lagrangian velocity correlation coefficient as

$$R_L(t) = \frac{\langle \mathbf{V}(\mathbf{a}, 0) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{a}, t) \rangle}{\langle \|\mathbf{V}(\mathbf{a}, 0)\|^2 \rangle}. \quad (6)$$

Denoting by E the mean initial energy of the particles

$$E = \frac{1}{2} \langle \|\mathbf{V}(\mathbf{a}, 0)\|^2 \rangle, \quad (7)$$

which approaches the mean energy of the flow as the particle sampling gets dense enough, we may write

$$S_L(t) = 2E(1 - R_L(t)). \quad (8)$$

The asymptotic behavior of the Lagrangian structure function at small times is given by (Babiano *et al.*, 1985a)

$$S_L(t) \sim Ct^2, \quad t \rightarrow 0 \quad (9)$$

with

$$C = \frac{\langle \|\nabla p\|^2 \rangle}{2\rho^2} \quad (10)$$

where ρ refers to density and p to pressure.

Assuming a finite Lagrangian integral time scale

$$T_L = \int_0^\infty R_L(t) dt \quad (11)$$

the Lagrangian structure function, at times larger than T_L , converges toward two times the energy

$$S_L(t) \sim 2E \quad t \gg T_L. \quad (12)$$

b. The Lagrangian integral time scale. The Lagrangian integral time scale can be related to enstrophy, according to the following argument. At small times (8) and (9) yield

$$R_L(t) \sim 1 - \frac{C}{2E} t^2. \quad (13)$$

To estimate T_L , we make the classical assumption that the integral of $R_L(t)$ (11) is essentially determined by its curvature at $t = 0$. Thus we may approximate $R_L(t)$, using

(13), by the Gaussian

$$R_L(t) = \exp\left(-\frac{C}{2E}t^2\right),$$

which yields

$$T_L = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\pi E}{C}}. \quad (14)$$

We now have to estimate C ; for this, we may use relation (10) and Millianchikov's quasi-gaussianity hypothesis (Batchelor, 1951), which give

$$C = 6E^2 \int_0^\infty \frac{1}{r} \left(\frac{d}{dr} R_{//}(r) \right)^2 dr. \quad (15)$$

Using the same argument as above, we again approximate $R_{//}(r)$ by a Gaussian whose curvature at the origin is given by relation (5) of BBS:

$$R_{//}(r) = \exp\left(-\frac{Z}{8E}r^2\right)$$

where Z refers to enstrophy

$$Z = \frac{1}{2} \langle \|\text{curl } \mathbf{V}\|^2 \rangle.$$

Then (15) is readily integrated to yield

$$C = \frac{3}{4}EZ, \quad (16)$$

$$T_L = \sqrt{\frac{2\pi}{3}} Z^{-1/2}. \quad (17)$$

The general form of (16) and (17) could be anticipated on simple dimensional arguments; the advantage of the analytical development is that it yields numerical values for the proportionality constants, which can be verified experimentally. Further, the Lagrangian integral time scale T_L is usually interpreted as the length of time during which a particle keeps its initial direction; this time scale is thus related to the curvature of trajectories and to velocity shears, both being measured by Z . Finally, we may also point out that, Z being (in the weak dissipation limit) a Lagrangian invariant, (17) can be efficiently used for any subset of particles in the flow domain.

c. Relations between Lagrangian structure function and single-particle dispersion.

Using the above definitions one classically obtains:

$$A(t) = 4E \int_0^t R_L(\tau)(t - \tau)d\tau = 4E \int_0^t \left(1 - \frac{S_L(\tau)}{2E}\right)(t - \tau)d\tau, \quad (18)$$

1987]

Babiano et al.: Single-particle dispersion

111

$$K(t) = 2E \int_0^t R_L(\tau) d\tau = 2E \int_0^t \left(1 - \frac{S_L(\tau)}{2E}\right) d\tau. \quad (19)$$

Relations (9) and (11), added to (18) and (19), yield the following asymptotic behaviors for the single-particle dispersion:

$$\left. \begin{aligned} A(t) &\sim 2Et^2 \left(1 - \frac{C}{12E} t^2\right) \\ K(t) &\sim 2Et \left(1 - \frac{C}{6E} t^2\right) \end{aligned} \right\}, \quad t \ll T_L, \quad (20)$$

$$\left. \begin{aligned} A(t) &\sim 2\mathcal{H}t \\ \mathcal{H} &\sim 2ET_L \end{aligned} \right\}, \quad t \gg T_L. \quad (21)$$

Formulas (20) (without the correction term in t^4) and (21) were given first by Taylor (1921), then by Kampé de Fériet (1939).

d. Relations with the Lagrangian spectrum. The Lagrangian energy spectrum is defined by

$$L(\omega) = \frac{2E}{\pi} \int_0^\infty R_L(t) \cos \omega t dt; \quad (22)$$

it is then related to the structure function by

$$S_L(t) = 4 \int_0^\infty \sin^2 \frac{\omega t}{2} L(\omega) d\omega, \quad (23)$$

and to the single-particle dispersion by:

$$A(t) = 8 \int_0^\infty \frac{\sin^2 \frac{\omega t}{2}}{\omega^2} L(\omega) d\omega. \quad (24)$$

The analysis of relation (24) shows (Kampé de Fériet, 1939; Batchelor, 1949) that at small times all Lagrangian frequencies contribute equally to the asymptotic behavior (20) of the single-particle dispersion. Conversely, at large times, small frequencies dominate in (24), which leads to the following approximations:

$$\left. \begin{aligned} A(t) &\sim 2\pi L(0)t \\ \mathcal{H} &\sim \pi L(0) \end{aligned} \right\} (t \gg T_L). \quad (25)$$

Thus at large times the eddy diffusion coefficient is related to the Lagrangian energy at the smallest frequencies. The implications of relations (23) and (24) on the Lagrangian

structure function and single-particle dispersion in the case of a self-similar spectrum will be discussed in the next section.

3. Behavior in a self similar range

Re-examining the relation between Eulerian energy spectra and Eulerian structure functions or relative dispersion, BBS have shown that the latter saturate at a r^2 dependency as soon as the former get steeper than k^{-3} . This implies in particular that energy spectrum is difficult to reconstruct from conventional Eulerian velocity correlation measurements alone. The arguments developed in BBS are in fact very general and can be directly restated in the Lagrangian framework involving Lagrangian energy spectra, Lagrangian structure functions and single-particle dispersion.

a. The Lagrangian structure function. For instance, either (23) or formula (22) of BBS yield the following behaviors of the Lagrangian or Eulerian structure functions according to the slope- n of the corresponding (Lagrangian or Eulerian) energy spectrum

$$\left. \begin{array}{ll} n < 1 & dS/d\sigma \sim 0 \\ 1 < n < 3 & S(\sigma) \sim \sigma^{n-1} \\ n > 3 & S(\sigma) \sim \sigma^2 \end{array} \right\}, \quad (26)$$

where σ refers either to the spatial scale (in the Eulerian case) or to time (in the Lagrangian case). Therefore the Lagrangian structure function also saturates at a t^2 dependency for steep Lagrangian energy spectra, with the same detrimental effects as stated above on reconstructing the latter from observations. Like in the Eulerian case, the t^2 dependency extends the small-time behavior (9) to the whole inertial range; replacing C by its value (16), we get

$$S_L(t) = \frac{3}{4} E Z t^2, \quad (27)$$

or in terms of E and T_L

$$S_L(t) = \frac{\pi}{4} (t/T_L)^2 E. \quad (28)$$

b. The single-particle dispersion. Similarly, the arguments given in BBS, applied to relation (24), yield the following expression for single-particle dispersion

$$A(t) = 8t^{n+1} \int_{\omega,t}^{\omega t} \sin^2 \frac{u}{2} u^{-(n+2)} du, \quad (29)$$

for a Lagrangian energy spectrum $L(\omega) = \omega^{-n}$ with low- and high-Lagrangian

1987]

Babiano et al.: Single-particle dispersion

113

frequency cut-offs ω_1 and ω_2 . From (29) we get a relation analogous to relation (24) of BBS:

$$A(t) = t^{n+1} \left[\frac{1}{4(1-n)} (2^{(1-n)/2} - (\omega_1 t)^{1-n}) - \frac{1}{2(n+1)} ((\omega_2 t)^{-(n+1)} - 2^{(n+1)/2}) \right], \quad (30)$$

yielding the following behavior:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{(i)} & n > 1 \quad A(t) \sim t^2 \\ \text{(ii)} & -1 < n < 1 \quad A(t) \sim t^{n+1} \\ \text{(iii)} & n < -1 \quad dA/dt \sim 0 \end{array} \right\}. \quad (31)$$

We proceed to a brief discussion of the three cases.

- (i) $n > 1$. The t^2 dependency of the single-particle dispersion across the self-similar range, obtained in the nonlocal case ($n > 3$) by the analysis of the Lagrangian structure function, is now proven in a more general case ($n > 1$). This result explains the weak dependency of the single-particle dispersion upon the Lagrangian structure function shape noted by Taylor (1921) and Frenkiel (1952, 1953).
- (ii) $-1 < n < 1$. Linear dependency of the single-particle dispersion upon time implies a constant energy spectrum ($n \simeq 0$). But we have seen, from relations (21) or (25), that $A(t)$ is indeed linear at large times. This means that the Lagrangian energy spectrum must be white at small frequencies. It also means that the asymptotic linear behavior of $A(t)$ will be reached more or less quickly, depending whether this asymptotic flatness of the energy spectrum extends more or less to intermediate frequencies.
- (iii) $n < -1$. This case, where the single-particle dispersion is constant, occurs for an increasing spectrum, for instance just after a spectral gap.

c. The diffusion coefficient. Definition (4) together with relations (31), yield the following behaviors of the diffusion coefficient:

- (i) $n > 1$: $K(t)$ is linear in t . In this case the asymptotic behavior at small times (20) extends throughout the whole range of time scales:

$$K(t) = 2Et, \quad (n > 1) \quad (32)$$

- (ii) $-1 < n < 1$. In this case

$$K(t) \sim t^n, \quad (-1 < n < 1). \quad (33)$$

Table 1. Characteristic parameters of the numerical experiment.

L	1000 km	
forcing scale R	50 km	
small-scale dissipation	$t_c = 6\text{h}30$	$\ell_c = 7,8 \text{ km}$
large-scale friction	$t_d = 76 \text{ days}$	$\ell_d = 500 \text{ km}$
time step	$\Delta t = 1 \text{ h}$	
energy	$12.5 \text{ cm}^2 \cdot \text{s}^{-2}$	
enstrophy	$0.0177 (\text{day})^{-2}$	
enstrophy dissipation rate	$1.38 \cdot 10^{-4} (\text{day})^{-3}$	

The interesting case is the case $n = 0$, which, as we have already seen, is the asymptotic case for large times. Then $K(t)$ is constant, its value being given by the asymptotic value (21):

$$K(t) = \mathcal{H} = 2ET_L, \quad (n = 0). \quad (34)$$

Then, the estimate (17) of the Lagrangian integral time scale yields

$$\mathcal{H} = \sqrt{\frac{8\pi}{3}} EZ^{-1/2}, \quad (n = 0). \quad (35)$$

Like in (16, 17), we have here an explicit value of the proportionality constant, which has been derived from analytical developments and can be verified on experimental grounds. A more complicated estimate, although dimensionally similar, has been proposed by Holloway and Kristmannson (1984).

(iii) $n < -1$. In this case (31) yields

$$K(t) \sim 0, \quad (n < -1). \quad (36)$$

4. Numerical experiments

The Eulerian numerical model (Basdevant *et al.*, 1981) integrates the quasi-geostrophic barotropic vorticity equation

$$\frac{d\zeta}{dt} + J(\psi, \zeta) = F(\zeta) + G(\zeta)$$

on a doubly periodic square domain of side L , using a pseudo-spectral approximation on a 128×128 grid. Here ψ refers to the stream-function, ζ to vorticity; $F(\zeta)$ and $G(\zeta)$ respectively to the forcing and dissipation term. Dissipation is defined as

$$G(\zeta) = -t_c^{-1} (-\ell_c^2 \Delta)^8 \zeta + t_d^{-1} \ell_d^{-2} \psi$$

where t_c and t_d are characteristic times, and ℓ_c the cutoff scale and ℓ_d the largest scale. Dissipation thus involves a “super-viscosity” based on an iterated Laplacian (Basdevant *et al.*, 1983), designed to dissipate essentially enstrophy near the cutoff scale, and

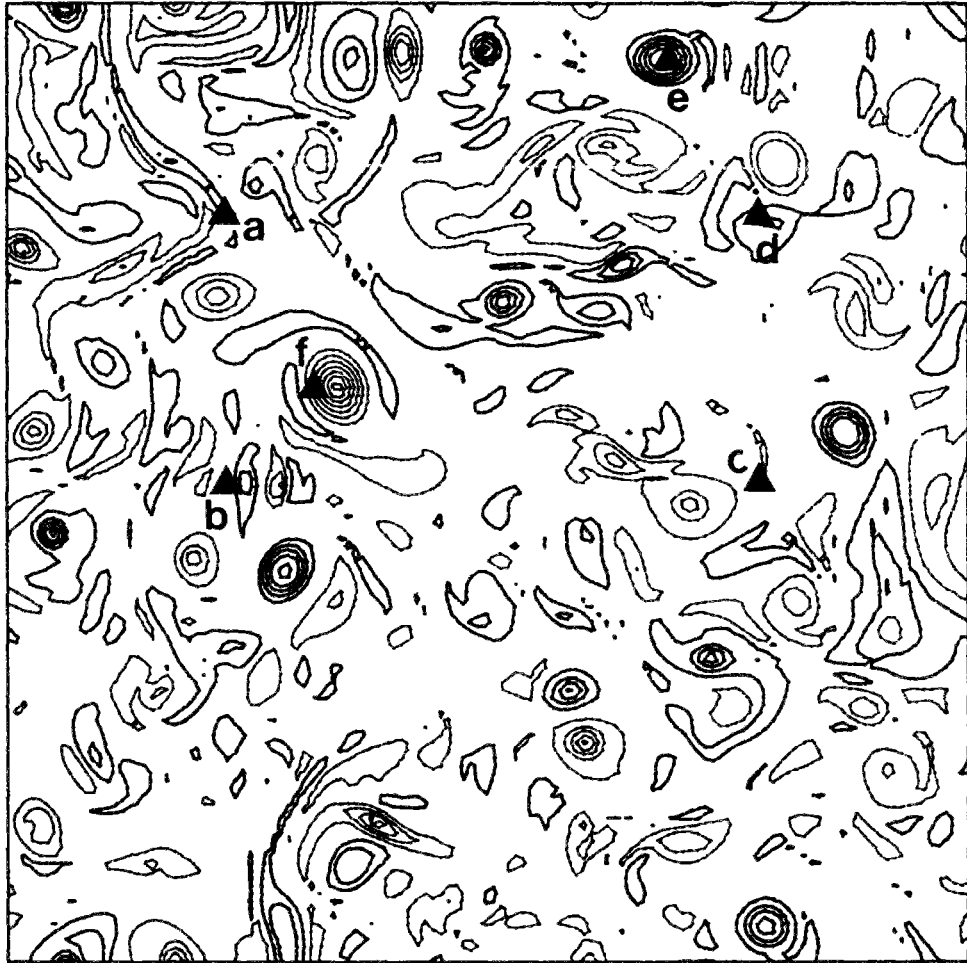


Figure 1. Initial vorticity field and localization of the six sets of tracers (a to f).

a linear “friction” designed to dissipate energy at larger scales. Forcing is included by keeping the amplitude of the zonal mode $k_1 = (0, 10)$ constant in time.

The model is integrated until stationary regime conditions are reached. At that stage, the characteristic parameters of the flow are those listed in Table 1.

At this stage particles are released in the flow and their Lagrangian motion is obtained by integrating their transport equation using a first-order forward scheme with a time step τ

$$\mathbf{x}(t + \tau) = \mathbf{x}(t) + \tau \mathbf{V}(\mathbf{x}(t), t).$$

The velocity \mathbf{V} at $\mathbf{x}(t)$ is evaluated by linear interpolation within the relevant mesh. All

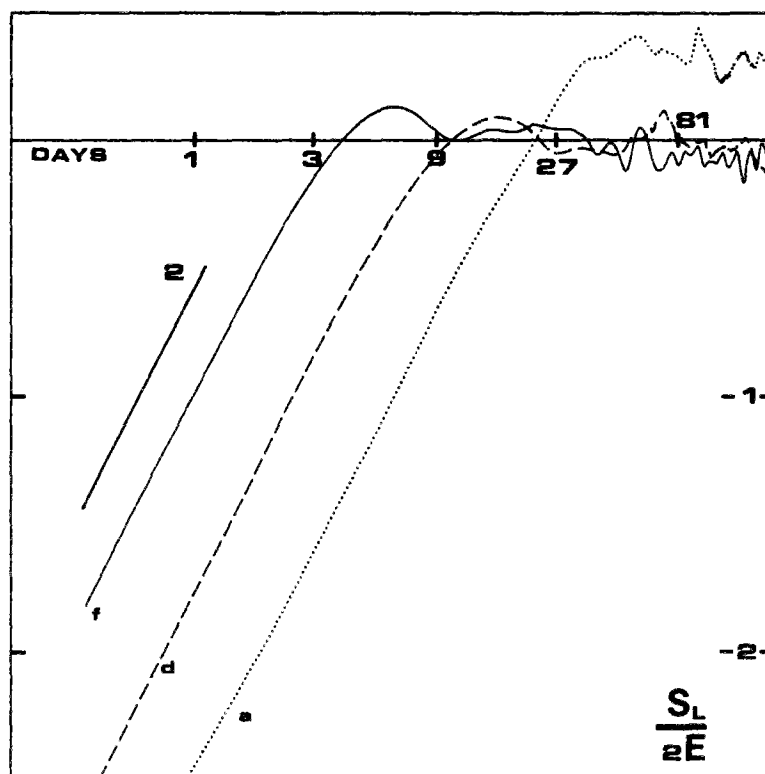


Figure 2. Lagrangian structure functions as a function of time for particle sets a, d and f (log-log scale); the t^2 dependency is indicated.

experiments described in this paper use a time step τ equal to the time step Δt used for integrating the equation of motion (which therefore verifies the CFL criterion).

The statistics leading to evaluation of Lagrangian structure functions, spectra, correlations and integral time scales, as well as the evaluation of absolute dispersion and large-scale diffusion coefficients, are constructed by following a set of fourteen initially square patches of 10×10 particles released at contiguous gridpoints in selected areas of the flow (Fig. 1). We first proceed to a detailed account of the results; the question of how much they are affected by spurious numerical diffusion will be addressed in Section 5.

a. Lagrangian structure functions. The Lagrangian structure functions computed separately for patches a, d, f of Figure 1 are displayed in Figure 2. These three patches have been chosen because they correspond to distinct energy or enstrophy levels: a is a weakly energetic area, f is strongly energetic, and d corresponds to the average energy of the flow (see Table 2 for more quantitative details). We indeed observe a t^2 behavior

Table 2. Adimensional measures of energy E , enstrophy Z , Lagrangian time scale T_L , and combinations thereof within 14 patches labeled from a to n. The length scale and time scale used for adimensionalization are $l_* = 159.1$ km and $t_* = 386.3$ days.

	E	Z	T_L	$2ET_L$	$EZ^{-1/2}$
a	14.86	1838.7	0.052	1.55	0.35
b	25.28	2364.2	0.056	2.83	0.52
c	65.66	497.3	0.038	4.99	2.94
d	65.43	5596.7	0.0158	2.067	0.87
e	239.3	23167	0.0075	3.59	1.57
f	319.9	31460	0.0057	3.64	1.8
g	17.19	1254	0.0555	1.9	0.48
h	9.22	299	0.0895	1.65	0.53
i	111.21	6493.8	0.015	3.33	1.38
j	181.7	15123	0.00925	3.36	1.48
k	195.0	18417.3	0.007	2.73	1.44
l	15.25	1223	0.043	1.31	0.44
m	108	10983.7	0.00925	2	1.03
n	24.2	2570	0.0215	1.04	0.48

at small times, which in all three cases, extends approximately to the corresponding T_L (see again Table 2). The three structure functions can be used to quantitatively verify relation (27). In (27), the coefficient $\frac{3}{4}EZ$ has been obtained from asymptotic arguments at small times; therefore, here E and Z have to be taken as the initial value of energy and enstrophy in each patch. In doing this we obtain, instead of the value $\frac{3}{4}$ predicted by (27): .54 for patch a, .89 for patch d and .96 for patch f. For $t > T_L$, $S_L(t)$ is practically constant. There is no visible transition range between the two regimes.

b. Lagrangian energy spectra. Two distinct regimes are also seen on the Lagrangian energy spectra (Fig. 3); they are approximately separated by T_L^{-1} and are consistent with the two regimes of $S_L(t)$.

At high frequencies ($\omega > T_L^{-1}$), $L(\omega)$ is steeper than ω^{-3} as expected; more precisely, $L(\omega)$ is significantly steeper than ω^{-3} for frequencies slightly higher than T_L^{-1} ; but at very high frequencies ($\omega \gg T_L^{-1}$), all spectra saturate at ω^{-3} . This clearly illustrates the systematic bias encountered in reconstructing an energy spectrum from a set of correlation measurements, already mentioned in BBS for Eulerian spectra. The correlation technique, if based upon an insufficient amount of data, tends to yield the noisiest spectrum compatible with the t^2 correlation law; i.e., a ω^{-3} spectrum. A precise estimate of the real slope, if it is steeper than ω^{-3} , would require an unrealistically large number of tracers. Figure 4 shows two estimates of the Lagrangian energy spectrum over the whole domain of the flow, using either 256 or 4096 tracers; the -3 law disappears in the second case.

At low frequencies ($\omega < T_L^{-1}$), we expect flat spectra, in accordance with (26) and

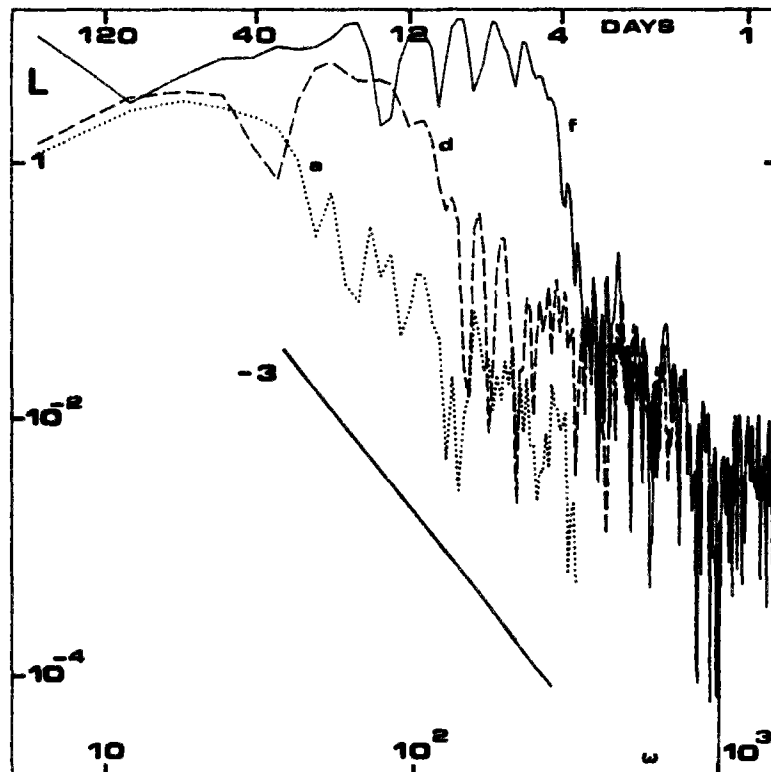


Figure 3. Lagrangian energy spectra of particle sets a, d and f (log-log scale); the ω^{-3} dependency is indicated.

the constant structure functions already found in Figure 2. In turn, this behavior indicates, from (31), a linear behavior of $A(t)$, or in other words, a constant dispersion coefficient given by (34).

c. Lagrangian correlations and integral scales. We show in Figure 5 the Lagrangian correlations $R_L(t)$ obtained for the six patches of Figure 1, and in Figure 6, the corresponding values of T_L computed from (11), in relation to the local estimates of Z or E given in Table 2. The diagram (T_L, E) of Figure 6b yields an estimate of the variability of the dispersion coefficient \mathcal{K} , as deduced from formula (21); the extreme values of \mathcal{K} are within a factor 5, in spite of the large range of energies and enstrophies involved in the choice of our patches (energy varies up to a factor 35 while enstrophy varies up to a factor 100). Simultaneous estimates of E and \mathcal{K} reported from observations in the ocean (Freeland *et al.*, 1975; Price, 1981; Colin de Verdiere, 1983) are also plotted in Figure 6b. Figure 6a shows that T_L closely follows the $Z^{-1/2}$

1987]

Babiano et al.: Single-particle dispersion

119

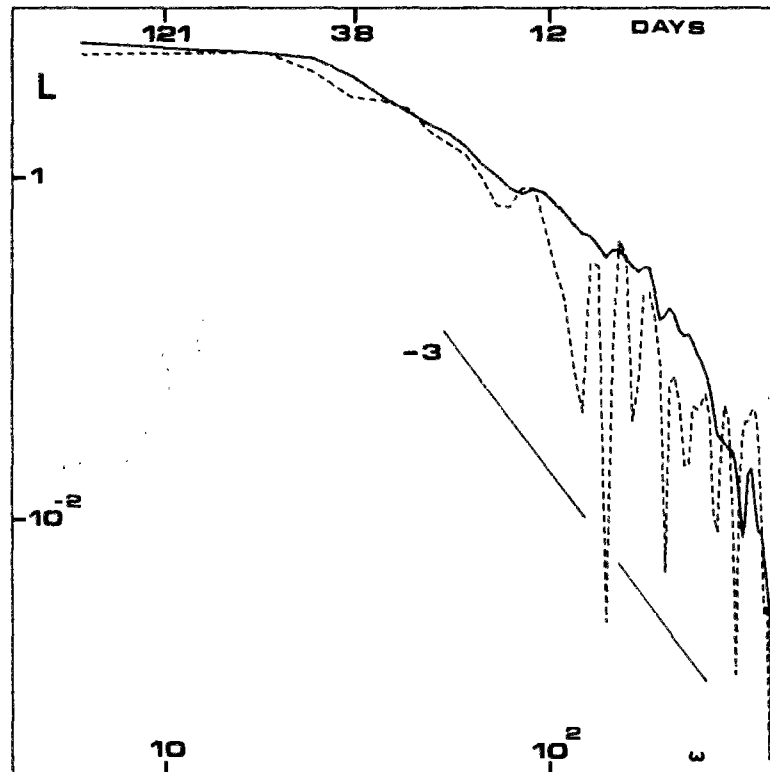


Figure 4. Lagrangian energy spectrum of the whole flow. Solid line: estimation using 4096 particles. Dotted line: degraded estimation using 256 particles (log-log scale). The ω^{-3} dependency is indicated.

dependency predicted by relation (17), especially in coherent vortex areas; the coefficient $\sqrt{2\pi/3}$, however, appears overestimated; the experimental value is around 1.12 rather than 1.45. There is, to our knowledge, no observation of Z in the ocean, connected with either measurements of the dispersion coefficient, or measurements of T_L .

d. Single-particle dispersion. The dispersion coefficient \mathcal{H} is given in Figure 7a as a function of $EZ^{-1/2}$, according to formula (35). The formula is again reasonably verified, but again it overestimates the slope by a factor 1.3. \mathcal{H} appears less well correlated to E than it is to $EZ^{-1/2}$, as shown by Figure 7b.

The absolute dispersion $A(t)$ is shown on Figure 8, again for patches a to f. We verify that the asymptotic law $A(t) \sim t^2$ extends indeed to time scales of the order of T_L , as expected from (31) or (20); moreover, the coefficient $2E$ predicted by (20) is in

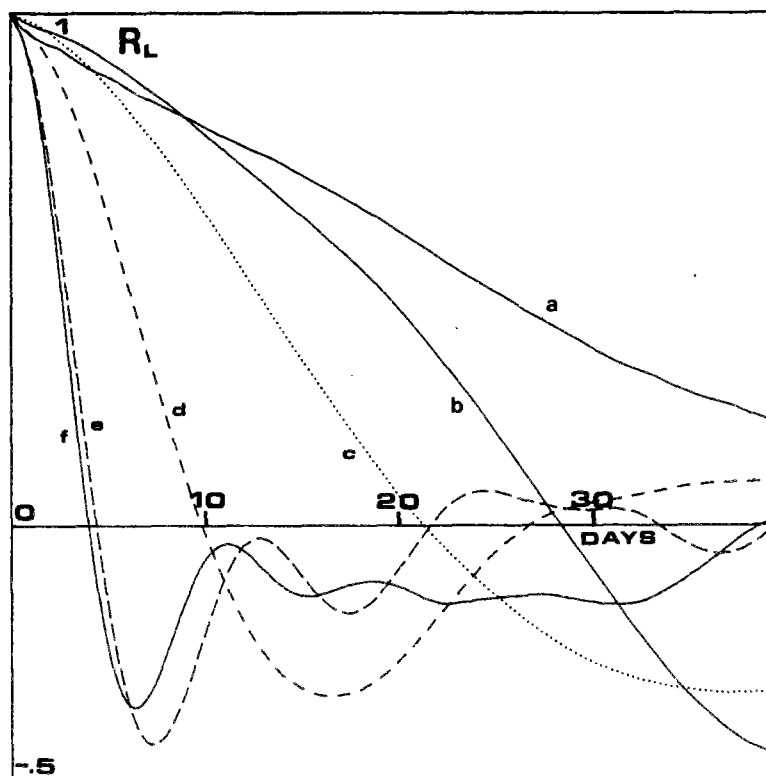


Figure 5. Lagrangian velocity correlations $R_L(t)$ for particle sets a to f.

excellent accordance with the numerical simulations. At $t \approx T_L$, we observe a rather abrupt shift toward a linear dependency in time, consistent with the already noticed saturation of the structure functions and the Lagrangian energy spectra. We know from Figure 7a that \mathcal{H} varies within a factor two in experiments a to f; such a quantitative information is not easily recovered directly from the curves in Figure 8, although it appears roughly consistent with them.

5. The effect of numerical diffusion

a. General considerations. The question of the accuracy of numerical schemes used for simulating particle trajectories has been addressed by Haidvogel (1982) and Haidvogel and Rhines (1983), who show that the first-order forward scheme we have been using here is a scheme of poor quality, according to an efficiency test based on particle conservation of “corrected” vorticity. This test, however, is somewhat inconclusive, for the following reasons. It consists in fact in integrating the Lagrangian vorticity equation along the computed particle trajectory and comparing this Lagran-

1987]

Babiano et al.: Single-particle dispersion

121

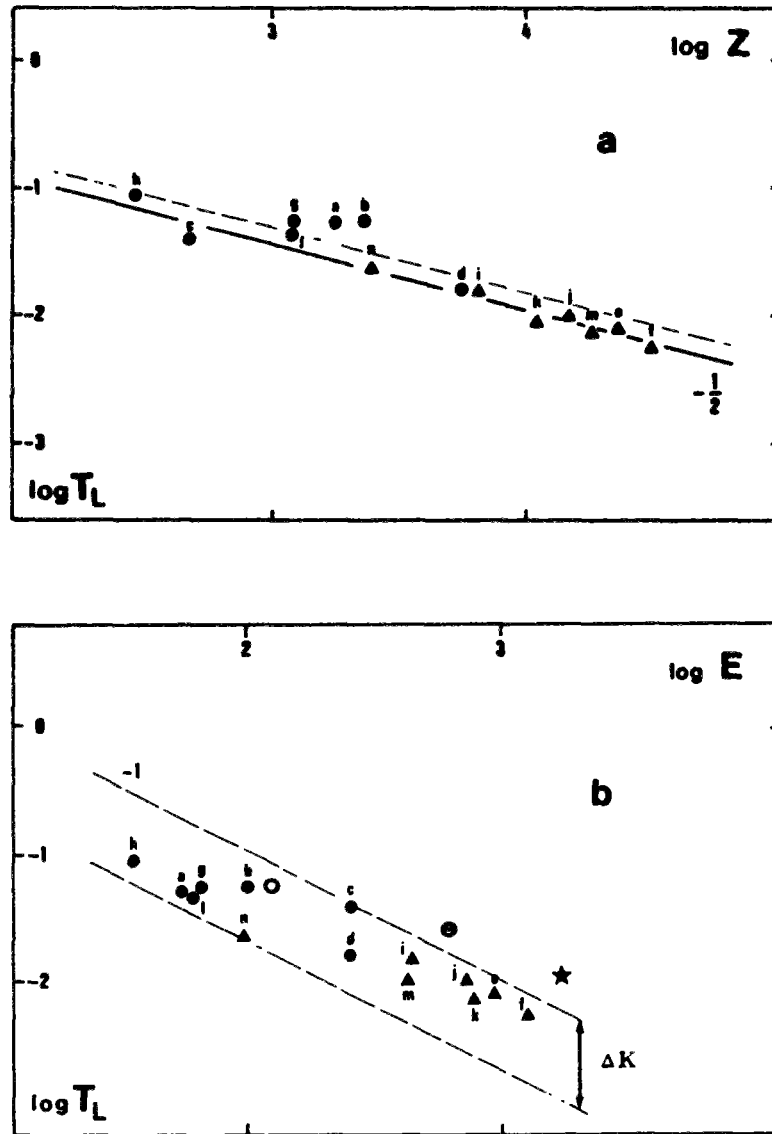


Figure 6. Lagrangian integral time scales T_L versus initial enstrophies (a) and initial energies (b). The symbols \blacktriangle correspond to strongly energetic areas (coherent vortices); symbols \bullet to weakly energetic areas. In a, the theoretical estimate (17) of T_L is indicated by a discontinuous line; the solid line is a regression line using coherent vortex data only. In b, Θ symbol refers to Price's (1981), \circ to Freeland's (1975), and \star to Colin de Verdière's (1983) measurements.

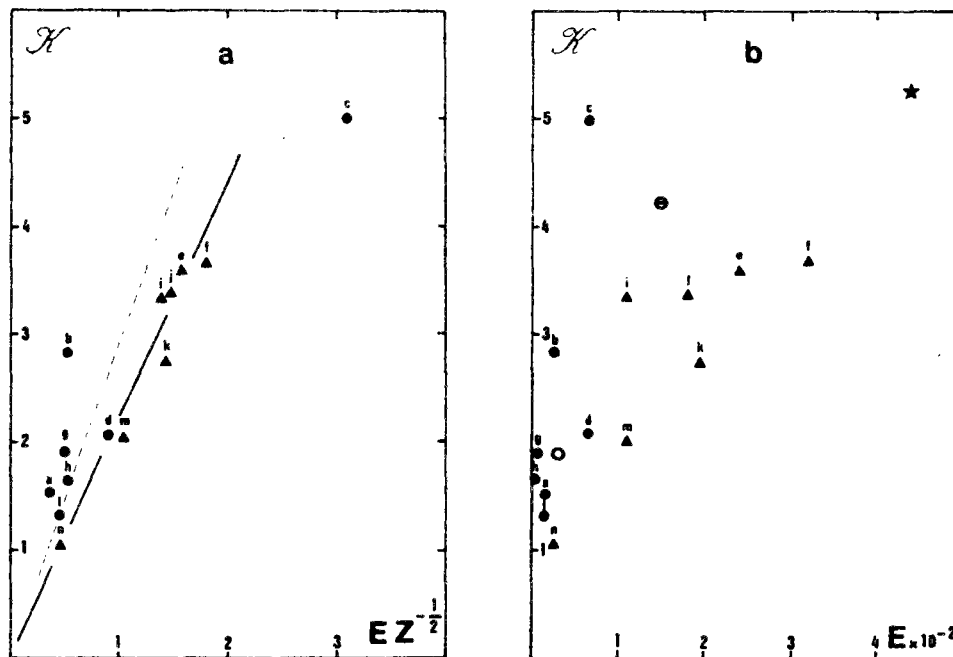


Figure 7. Large-time eddy diffusion coefficient K versus $EZ^{-1/2}$ (a) and initial energy (b). Same symbols as in Figure 6.

gian prediction with the prediction obtained at the particle location using the Eulerian model. In doing so:

- (i) we have to integrate the diffusion term along the trajectory, which introduces an additional source of error;
- (ii) the difference between the two values of vorticity at a particle location comes from the numerical errors or uncertainties of both models, due in part to the lack of definition of the sub-grid scales: it is not simply a measure of the Lagrangian model deficiencies;
- (iii) even though the initial seed of decorrelation between the two solutions, in terms of Eulerian vs Lagrangian vorticity values, is the difference in truncation errors of the two models, its subsequent growth is actually governed by the local predictability properties of the motion: the lack of continuous dependency on initial data which is characteristic of turbulent flows, makes this test a predictability test rather than an accuracy test.

What we must evaluate is indeed the spurious numerical diffusion induced by our present scheme. We get a first estimation by applying it to a set of particles drifting in a frozen field; such particles would indeed follow the streamline if the displacement

1987]

Babiano et al.: Single-particle dispersion

123

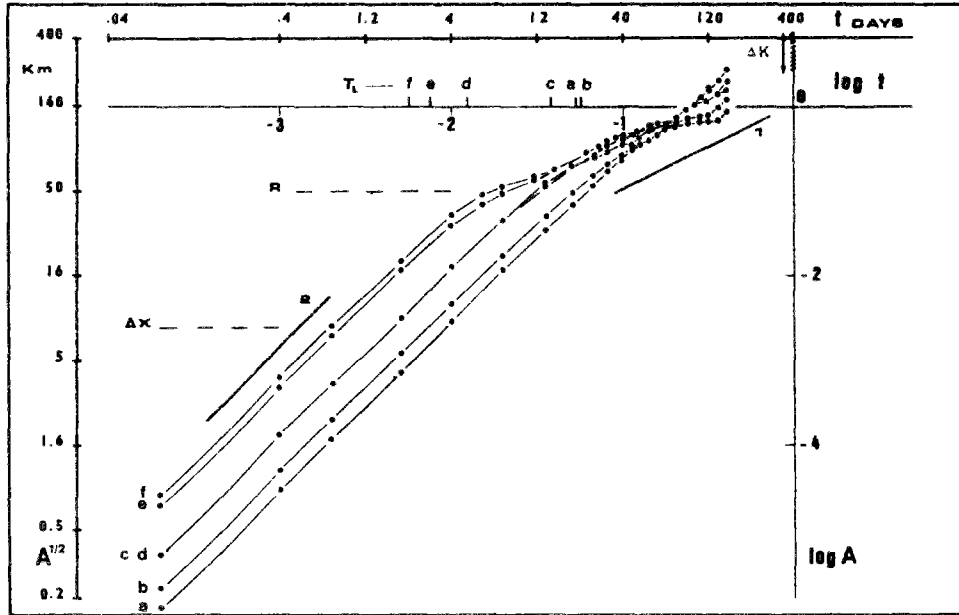


Figure 8. Single-particle dispersions $A(t)$ versus time for the 6 particle sets a to f. The slopes 1 and 2 are indicated, as well as the Lagrangian integral time scale T_L for each set. The mesh size Δx of the numerical model and the forcing scale R are also indicated.

algorithm were exact. We take the frozen field as the motion field at some arbitrary time $t = t_0$; Figure 9 shows the trajectories of five particles followed during 4000 time steps, superimposed on the frozen streamfunction field. On such a time scale we observe rather small departures between trajectories and streamlines, except perhaps around vortices, where particles are slowly expelled from the center.

To get a more quantitative estimate of numerical diffusion, we select six squares \mathcal{D}_i ($i = 1, 6$) of $m \times m$ contiguous gridpoints, chosen to give a fair sampling of the various flow conditions (vortices, active or inactive regions) encountered by a particle in its motion (Fig. 9). For each square \mathcal{D}_i we define a time scale $\theta_i = n_i \tau \simeq 2\Delta x / \sqrt{E_i}$, where E_i is the energy per unit area in \mathcal{D}_i ; θ_i is thus a multiple of τ which corresponds to an average displacement of roughly two grid intervals for particles belonging to \mathcal{D}_i . Then we consider 6 sets of particles which initially coincide with all the gridpoints $\mathbf{a} \in \mathcal{D}_i$, and we move them in the frozen field using $\tau = \Delta t$; we denote by $\mathbf{x}(\mathbf{a}, \theta_i)$ their computed location at time θ_i . The root-mean-square variation of ψ in this motion

$$\Delta\Psi_i^N(\theta_i) = \left(\frac{1}{m^2} \sum_{\mathbf{a} \in \mathcal{D}_i} \left| \psi[\mathbf{x}(\mathbf{a}, \theta_i), t_0] - \psi[\mathbf{a}, t_0] \right|^2 \right)^{1/2} \quad (37)$$

which would vanish for a perfect scheme, is a measure of the spurious numerical

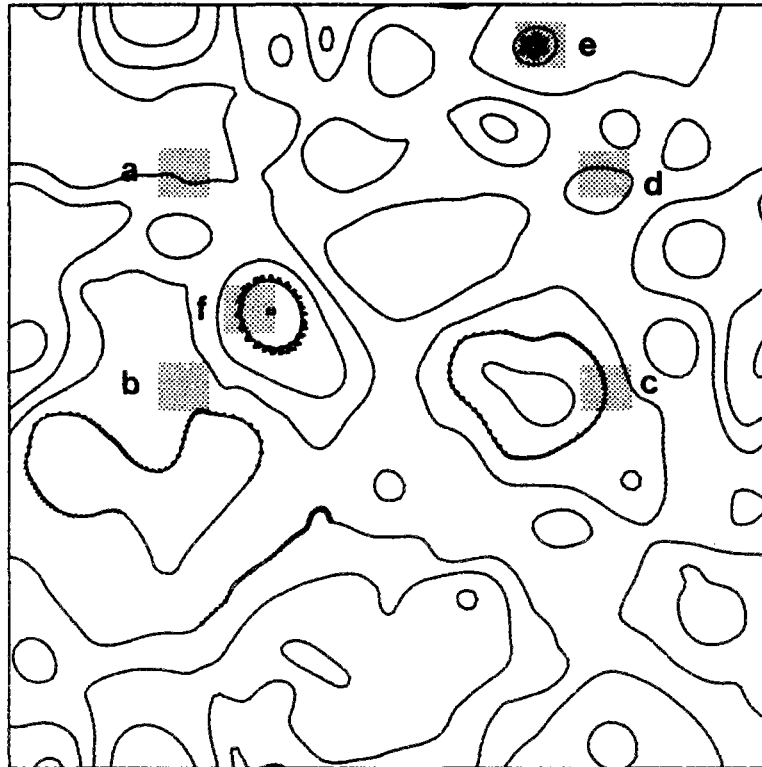


Figure 9. Streamlines of the frozen flow used for testing the particle motion algorithm. Five trajectories lasting over 4000 time steps are shown, together with the six squares \mathcal{D}_i for which the ratio of numerical diffusion to turbulent diffusion is computed.

diffusion for the given flow conditions. Similarly we evaluate the (physical) turbulent diffusion by

$$\Delta\Psi_i^T(\theta_i) = \text{Min}_{\alpha \in \mathcal{D}_0} \left(\frac{1}{m^2} \sum_{\mathbf{a} \in \mathcal{D}_i} \{ \psi(\mathbf{a} + \alpha, t_0 + \theta_i) - \psi(\mathbf{a}, t_0) \}^2 \right)^{1/2} \quad (38)$$

where \mathcal{D}_0 is the set of translations $(k\Delta x, \ell\Delta x)$, $-m/2 \leq k, \ell \leq m/2$. Thus (38) is a measure of the deformation of flow structures, the minimum over $\alpha \in \mathcal{D}_0$ being applied to eliminate the local mean motion. The ratios $\Delta\Psi_i^N/\Delta\Psi_i^T$, which measure the ratio of erroneous numerical diffusion to physical diffusion, are displayed in Table 3 for the 6 samples of Figure 9; in (37) and (38) we have taken $m = 10$. Table 3 shows that the effect of numerical diffusion when a time step $\tau = \Delta t$ is used, is roughly an order of magnitude smaller than physical diffusion. The worst case is the vortex *f*, where we get a ratio of 0.3. The fact that we get a relatively large value there is easy to explain; strong stable vortices tend to induce a relatively large numerical diffusion due to the combined effect of high velocity and curvature, which ejects particles along

1987]

Babiano et al.: Single-particle dispersion

125

Table 3. The effect of numerical diffusion when a time step $\tau = \Delta t$ is used, is roughly an order of magnitude smaller than physical diffusion. The worst case is the vortex f, where we get a ratio of 0.3. The fact that we get a relatively large value there is easy to explain.

Sample \mathcal{D}_i	a	b	c	d	e	f
n_i	224	172	108	108	56	49
$\Delta\Psi_i^N/\Delta\Psi_i^T$	0.07	0.06	0.04	0.13	0.14	0.30

spirals; on the other hand, turbulent diffusion there is not particularly large, because the strength of gradients is counterbalanced by stability. Even in this extreme case we find that numerical diffusion is still significantly smaller than turbulent diffusion.

b. Numerical diffusion in a coherent vortex. Let us analyze in more detail the numerical diffusion process within a circular vortex; we choose vortex f, which gave us the worst result in Table 3. Figure 10 shows the Lagrangian correlation $R(t)$ for a

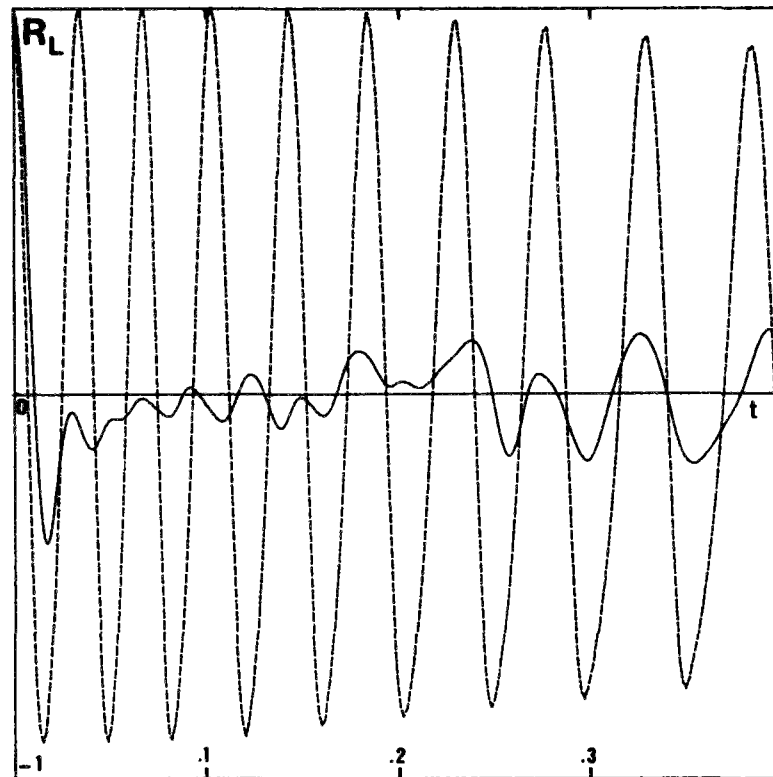


Figure 10. Lagrangian velocity correlation $R_L(t)$ for a single particle released in the frozen vortex f (discontinuous line), compared to the same correlation averaged over 100 particles (solid line).

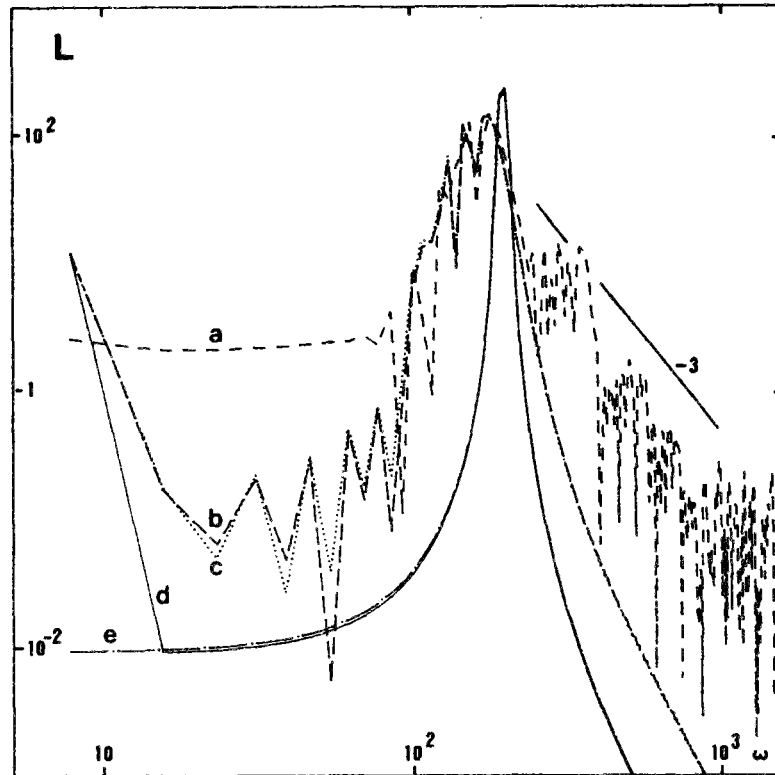


Figure 11. Effect of the numerical diffusion on the Lagrangian energy spectrum (see text for details).

single particle released in the frozen vortex. As expected, $R(t)$ oscillates between 1 and -1 , with a period corresponding to one turnaround time. From the beginning however, $R(t)$ does not drop below $-.9$, which means that the path is not a perfectly symmetric curve followed with perfectly regular speed; this has of course nothing to do with numerical diffusion. Numerical diffusion is on the contrary responsible for the long-term trends of the oscillation, characterized by a slow decrease in amplitude and frequency. We thus observe that numerical diffusion begins to affect the correlation significantly after a time of the order of .1; i.e., one order of magnitude above the Lagrangian integral scale $T_L = .0057$.

The effect of this numerical diffusion process on the Lagrangian spectrum can be analyzed on Figure 11, where curve a corresponds to the Fourier transform of the single-particle correlation $R(t)$ of Figure 10; this spectrum is characterized by a broad peak dominating a white noise band at low frequencies, and a ω^{-3} band at high frequencies. The ω^{-3} effect has been already discussed in section 4b. Without numerical diffusion we would have obtained something close to a Dirac function

centered at $\omega_R = 2\pi/T_R$, where $T_R = .032$ is the initial turnaround period of the single particle. Numerical diffusion is thus responsible for the broadening of the peak at frequencies $\omega < \omega_R$; this corresponds to the decrease in frequency already observed in Figure 10. To see the effect, on the Lagrangian spectrum, of the various characteristics of $R(t)$, we construct an analytic function

$$\tilde{R}(t) = 2E \left\{ \alpha_1 + (1 - \alpha_1) \cos \frac{2\pi t}{T} \exp(-\alpha_2 t^2) \right\} \quad (39)$$

with $T = T_R + t(T_1 - T_R)/T_M$. Here $T_M = .4096$ is the duration of our experiments. Taking $\alpha_1 = .05$, we get for $\tilde{R}(t)$ the observed lower bound $-.9$ of $R(t)$; taking $T_1 = .044$ yields a frequency modulation from an initial period close to T_R , to a final period close to $.054$ as observed in $R(t)$; and taking $\alpha_2 = 2.22 \times 10^{-7}$ gives us the observed amplitude damping of $R(t)$. With these values of the coefficients, the Fourier transform of (39), performed in the same conditions as for obtaining curve a, yields curve b of Figure 11, which exhibits a similar peak broadening, but misses the low-frequencing white noise. Next, we degrade the approximation by choosing $\alpha_2 = 0$, hereby deleting the amplitude damping (curve c); obviously amplitude damping has little effect on the spectral shape, if we compare curves b and c. We then get curve d by deleting the period modulation, taking $T_1 = T_R$, and curve e by finally setting $\alpha_1 = 0$, thus going back to a perfect cosine curve. The Dirac function centered at $t = T_R$ is well approximated by the two last curves. We conclude from this discussion that most of the spectral peak broadening is due to the frequency modulation associated with numerical diffusion. On the other hand, we have not really explained the low-frequency white noise band; nevertheless, it is reasonable to also attribute it to numerical diffusion, keeping in mind that our simple linear approximation of frequency modulation works well in the immediate vicinity of ω_R (yielding the observed local broadening) but fails to recover the behavior of $L(\omega)$ at very low frequencies.

It is not fortuitous, in fact, that the broadening of a spectral peak associated with single-particle motion within an isolated vortex occurs toward frequencies lower than ω_R . An isolated vortex is a structure where vorticity is maximum at the center and decreases regularly all around. On the other hand, the turnaround period T_R along a closed streamline is easily identified with the average vorticity inside. Therefore, as a particle is steadily expelled away from the vortex center by numerical diffusion, its turnaround period increases.

Figure 12 shows the single-particle dispersion as a function of time, for the case of vortex f. The effect of numerical diffusion is clearly described by the drift of the extrema of curve a, which depicts the evolution of the absolute dispersion of a single tracer released in the frozen vortex. If we compare curve a to curve b, which describes the absolute dispersion of a set of 100 tracers in the same frozen field, we may infer that the contribution of numerical diffusion to absolute dispersion in that case remains negligible as long as t does not reach at least an order of magnitude above T_L .

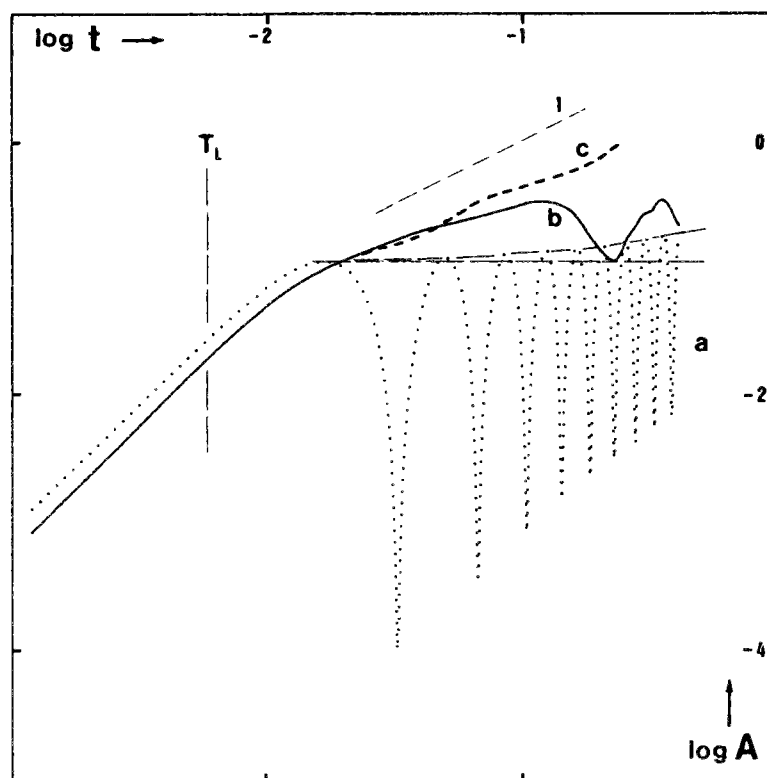


Figure 12. Effect of the numerical diffusion on the single-particle dispersion (see text for details).

c. Evolving fields vs frozen fields. Figure 12 also shows the absolute dispersion of the same initial set of 100 tracers, this time in the evolving vortex *f* (curve *c*). Comparing curve *c* to curve *b*, we observe that the time evolution of the flow does not alter significantly the absolute dispersion, until times of the order of $10 \times T_L$ are again reached. Of course at very long times, absolute dispersion in a frozen flow domain characterized by closed streamlines becomes stationary or oscillating around a constant value (except for the effect of numerical diffusion which tends to expel particles out of the closed streamline domain), while absolute dispersion in the evolving flow reaches the expected linear dependency of time.

Another illustration of the comparison between frozen and evolving fields is given in Figure 13, which shows the Lagrangian correlation R_L in both cases, for the three patches *a*, *d*, *f* already described (remember that *a* is a weakly energetic region, *d* a region with average energy, and *f* the strongest vortex in the flow). The fact that the flow is frozen or evolving in time has obviously no effect on the Lagrangian time scale.

Thus the fact that the flow varies in time has no significant effect on Lagrangian

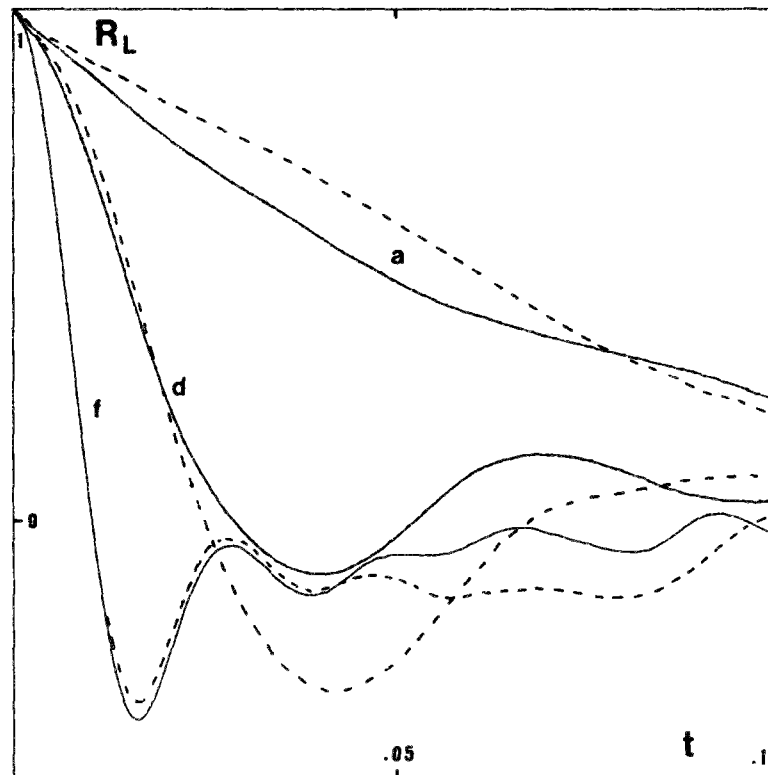


Figure 13. Lagrangian velocity correlations $R_L(t)$ in evolving fields (solid line) and frozen fields (discontinuous line) for particle sets a, d and f.

statistics until we reach time scales $t \gg T_L$. It follows from this that our present statistics are not likely to be influenced by the truncation errors of the Eulerian model in the same range of time scales.

d. Limits of validity of Lagrangian statistics due to numerical diffusion. We may now go back to the discussion of Lagrangian statistics partially developed in Section 4, and evaluate where biases due to numerical diffusion effects might affect the results. Roughly speaking, we may trust everything which deals with time scales not significantly greater than T_L . For example, the frequency shoulders of the Lagrangian energy spectra of Figure 3 are to be trusted. The low-frequency limits of the same spectra, on the contrary, are dubious. We know that $L(\omega)$ must become stationary at very small frequencies, but the fact that stationarity is obtained right from the frequency shoulder might be a numerical diffusion bias; we have seen in Section 5b that numerical diffusion tends to broaden spectral peaks toward low frequencies.

Similarly, the estimates of single-particle dispersion shown in Figure 8 are likely to be biased in the large time limit. At very large times, we normally expect, in connection

with the stationarity of $L(\omega)$, an asymptotic linear law (21)

$$A(t) \sim 2\mathcal{K}t,$$

which gives the magnitude of the asymptotic diffusion coefficient \mathcal{K} . A direct estimate of \mathcal{K} from Figure 8 is however impossible, because we cannot trust the single-dispersion estimates $A(t)$ in the large-time limit. On the opposite, the estimates of \mathcal{K} given in Figure 7 are reliable, because large time-scales have been discarded in evaluating T_L .

6. Conclusion

The present work confirms the classical asymptotic estimates of single-particle dispersion at small and large times, given by Taylor (1921) and Batchelor (1949). Further, it proves that the classical estimate at small times is more than an asymptotic behavior when the Lagrangian energy spectrum is steeper than ω^{-1} ; in that case it is in fact valid all the way up to the integral time scale T_L . For $t < T_L$ and spectra steeper than ω^{-3} , we note a “practical indeterminacy” of the spectral slope, like the one observed in BBS for the Eulerian spectrum, the Lagrangian spectrum, reconstructed from an imperfect set of Lagrangian correlations, tends to saturate at an artificial “background” ω^{-3} slope.

The Lagrangian integral time scale T_L has been related here to the local enstrophy of the flow. This estimate is sustained by the remark that local enstrophy is indeed a Lagrangian invariant in the weak dissipation limit; the relation between T_L and local enstrophy is of course particularly straightforward in the case of a coherent vortex. T_L appears as a very clear boundary between two regimes of the various Lagrangian statistics. As t increases and crosses T_L , single-particle dispersion shifts from a quadratic to a linear dependency of time, the diffusion coefficient reaches its asymptotic value, and the Lagrangian spectrum shifts from a steep power law to a zero slope.

The Lagrangian statistics obtained from numerical experiments at large times ($t \gg T_L$) are difficult to use because they are contaminated by numerical diffusion. The numerical diffusion bias could be alleviated by possibly an order of magnitude, just by using a more elaborate (second order) scheme for extrapolating the particle motion; this has not been done here. It was possible, however, to verify our theoretical prediction of the value of the eddy diffusion coefficient at large times $\mathcal{K} = \sqrt{8\pi/3} \cdot EZ^{-1/2}$, because this value is attained in practice as soon as t reaches T_L . From the present simulations, the experimental estimate of \mathcal{K} was found actually smaller than the theoretical value by 20%; but more recent experiments performed by Lien Hua (private communication) in the barocline case indicate a value 30% higher.

Acknowledgments. The authors are grateful to the unknown referee whose unyielding criticism led to drastic improvement of the paper.

REFERENCES

- Babiano, A., C. Basdevant and M. Larchevêque. 1985a. Fonction de structure et spectre lagrangiens d'un écoulement turbulent bidimensionnel. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 300, 195–198.
- Babiano, A., C. Basdevant, B. Legras and R. Sadourny. 1984. Dynamique comparée du tourbillon et d'un scalaire passif en turbulence bi-dimensionnelle incompressible. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 299, 601–604.
- Babiano, A., C. Basdevant and R. Sadourny. 1985b. Structure functions and dispersion laws in two-dimensional turbulence. *J. Atmos. Sci.*, 42, 942–949.
- Basdevant, C., Y. Couder and R. Sadourny. 1984. Vortices and Vortex-Couples in Two-Dimensional Turbulence or Long-Lived Couples are Batchelor's Couples. *Lecture Notes in Physics*, 230, pp. 327–346.
- Basdevant, C., B. Legras R. Sadourny and M. Béland. 1981. A study of Barotropic model flows: Intermittency waves and predictability. *J. Atmos. Sci.*, 38, 2305–2326.
- Basdevant, C. and R. Sadourny. 1983. Modélisation des échelles virtuelles dans la simulation numérique des écoulements turbulents bidimensionnels. *J. Mécan. Théor. et Appl. Numéro Spécial*, 243–270.
- Batchelor, G.K. 1949. Diffusion in a field of homogeneous turbulence. *Austr. J. Sci. Res.*, 42, 437–450.
- 1951. Pressure fluctuations in isotropic turbulence. *Proc. Cambr. Phil. Soc.*, 47, 359–374.
- Bennett, A. F. 1984. Relative dispersion: Local and nonlocal dynamics. *J. Atmos. Sci.*, 41, 1881–1886.
- Colin de Verdière, A. 1983. Lagrangian eddy statistics from surface drifters in the eastern North Atlantic. *J. Mar. Res.*, 41, 375–398.
- Couder, Y., C. Basdevant and H. Thome. 1984. Sur l'apparition de couples solitaires de tourbillons de sillages bidimensionnels turbulents. *C. R. Acad. Sci., Paris*, 299, 89–94.
- Freeland, H., P. Rhines and T. Rossby. 1975. Statistical observations of the trajectories of neutrally buoyant floats in the North Atlantic. *J. Mar. Res.*, 33, 383–404.
- Frenkiel, F.N. 1952. Application of the statistical theory of turbulent diffusion to micrometeorology. *J. Meteor.*, 9, 252–259.
- 1953. Turbulent diffusion: Mean concentration distribution in a flow field of homogeneous turbulence. *Adv. Appl. Mech.*, 3, 61–107.
- Haidvogel, D.B. 1982. On the feasibility of particle tracking in eulerian ocean models. *Ocean modelling* 45, 4–9.
- Haidvogel, D.B. and P.B. Rhines, 1983. Waves and circulation driven by oscillatory winds in an idealized ocean basin. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, 25, 1–63.
- Holloway, G. and S.S. Kristmannson. 1984. Stirring and transport of tracer fields by geostrophic turbulence. *J. Fluid Mech.*, 141, 27–50.
- Kampé de Fériet, J. 1939. Les fonctions aléatoires stationnaires et la théorie statistique de la turbulence homogène. *Ann. Soc. Sci. Bruxelles*, 59, 15–194.
- Mc Williams, J. C. 1984. The emergence of isolated coherent vortices in turbulent flow. *J. Fluid Mech.*, 146, 21–43.
- Price, J. 1981. Diffusion statistics computed from SOFAR float trajectories in the western North Atlantic. Unpublished proceedings of CAMS-WHOI Symposium on Lagrangian Tracers. Woods Hole, March, 1981.
- Taylor, G.I. 1921. Diffusion by continuous movements. *Proc. Lond. Math. Soc.*, 20, 196–212.

Received: 10 July, 1985; revised: 7 October, 1986.

Annexe 2: Dispersion relative, Note aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences.

C. R. Acad. Sci. Paris, t. 305, Série II, p. 5-8, 1987

5

Turbulence/Turbulence

Quelques remarques sur la formulation non autosimilaire des lois de dispersion relative en turbulence bidimensionnelle

Armando BABIANO et Pascal LE ROY

Résumé — On montre que les résultats classiques sur la dispersion relative de paires et, en particulier la loi de Richardson, semblent correspondre à une surestimation de la dispersion. Cette conclusion ressort de la confrontation entre une formulation mathématique rigoureuse de la dispersion et les résultats d'expériences numériques.

Some remarks about the non selfsimilary formulation of the relative dispersion laws in two-dimensional turbulence

Abstract — It is shown that classical results concerning the relative dispersion of pairs (for example the Richardson law) seem to be associated to an overestimation of dispersion. This conclusion is derived from the confrontation of a rigorous mathematical formulation of dispersion and results from numerical experiments.

Nous nous intéressons à la dispersion de paires de particules qui, éloignées initialement d'une même distance $D_0 = \|\mathbf{D}_0\|$, sont advectées par un champ turbulent bidimensionnel stationnaire. Les résultats fondamentaux sur ce problème dérivent essentiellement de la théorie autosimilaire de A. N. Kolmogorov et A. M. Oboukhov : l'évolution temporelle du carré moyen de l'éloignement relatif est exponentielle dans la cascade d'ensrophie et en t^3 (loi de Richardson) dans la cascade inverse d'énergie. Dans cette Note, nous confrontons ces estimations classiques aux résultats d'expériences numériques directes. Nous proposons une description mathématique proche de celle déjà explorée par Lin et Reid [1] mais beaucoup moins restrictive.

1. DEFINITIONS. — Pour chaque paire nous définirons le vecteur de séparation $\mathbf{D}(t)$, le vecteur vitesse relative $\delta\mathbf{V}(t)$ et le vecteur accélération relative $\delta\mathbf{\Gamma}(t) = d/dt \delta\mathbf{V}(t)$. En moyenne d'ensemble $\langle \cdot \rangle$ sur toutes les paires, ces grandeurs sont reliées par :

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \langle \|\delta\mathbf{V}(t)\|^2 \rangle = \langle \|\delta\mathbf{V}_0\|^2 \rangle + 2 \int_0^t \langle \delta\mathbf{V}_0 \cdot \delta\mathbf{\Gamma}(\tau) \rangle d\tau + \left\langle \left\| \int_0^t \delta\mathbf{\Gamma}(\tau) d\tau \right\|^2 \right\rangle \\
 (2) \quad & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} D^2(t) = \langle \|\delta\mathbf{V}_0\|^2 \rangle + \int_0^t (2t - \tau) \langle \delta\mathbf{V}_0 \cdot \delta\mathbf{\Gamma}(\tau) \rangle d\tau \\
 & \quad + t \left\langle \left\| \int_0^t \delta\mathbf{\Gamma}(\tau) d\tau \right\|^2 \right\rangle - \left\langle \int_0^t \tau \delta\mathbf{\Gamma}(\tau) d\tau \cdot \int_0^t \delta\mathbf{\Gamma}(\tau') d\tau' \right\rangle \\
 (3) \quad & D^2(t) = D_0^2 + \langle \|\delta\mathbf{V}_0\|^2 \rangle t^2 + 2t \int_0^t (t - \tau) \langle \delta\mathbf{V}_0 \cdot \delta\mathbf{\Gamma}(\tau) \rangle d\tau + t^2 \left\langle \left\| \int_0^t \delta\mathbf{\Gamma}(\tau) d\tau \right\|^2 \right\rangle \\
 & \quad - 2t \left\langle \int_0^t \tau \delta\mathbf{\Gamma}(\tau) d\tau \cdot \int_0^t \delta\mathbf{\Gamma}(\tau') d\tau' \right\rangle + \left\langle \left\| \int_0^t \tau \delta\mathbf{\Gamma}(\tau) d\tau \right\|^2 \right\rangle
 \end{aligned}$$

où l'on a supposé $\langle \mathbf{D}_0 \cdot \delta\mathbf{V}(t) \rangle = 0$ (H1) et $\langle \mathbf{D}_0 \cdot \delta\mathbf{\Gamma}(t) \rangle = 0$ (H2), ce qui revient à admettre l'homogénéité dans l'espace. L'analyse des relations (1)-(3) se heurte à la difficulté caractéristique de la dispersion relative : la non-stationnarité des corrélations des vitesses et des accélérations relatives. Cette particularité différencie son traitement analytique de celui de la dispersion absolue abordé dans [2].

Note présentée par Paul GERMAIN.

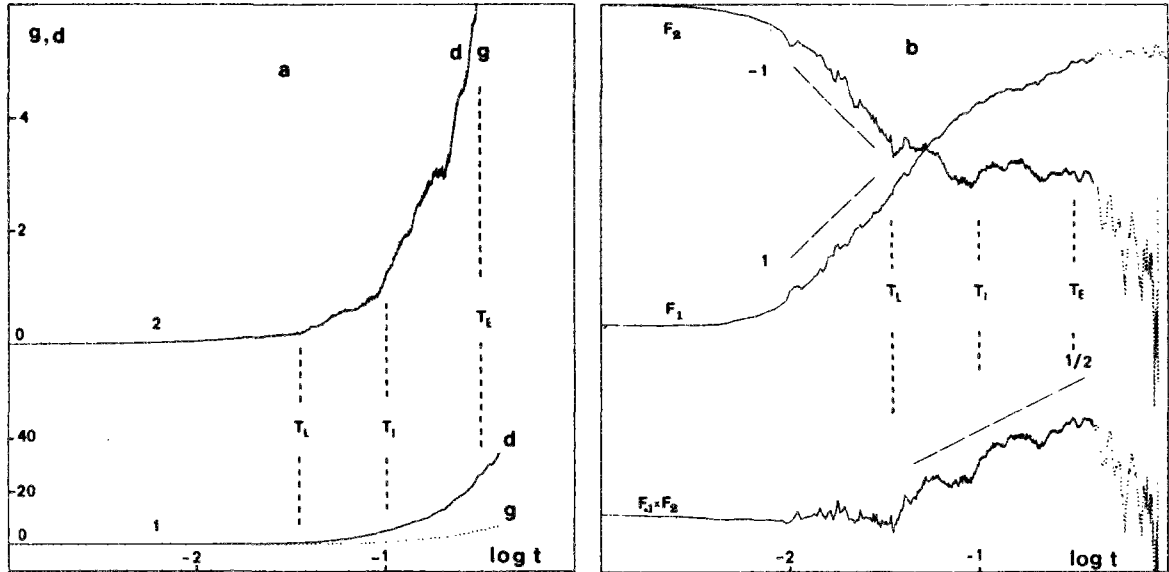


Fig. 1. — (a) Vérification expérimentale des équations (8) (courbe 1) et (9) (courbe 2). Termes de gauche (g); termes de droite (d). (b) Évolutions de F_1 , F_2 et de leurs produits en fonction du temps; le pointillé correspond à un prolongement moins échantillonné de l'expérience numérique (log-log).

Fig. 1. — (a) Experimental verification of equations (8) (curve 1) and (9) (curve 2). Left-hand term (g); right-hand term (d). (b) Time evolution of F_1 , F_2 and their product; the dashed line is a less sampled extension of the numerical experiment (log-log scale).

2. RÉGIME QUASI-ASYMPTOTIQUE DE C. C. Lin. — Dans une approche simplifiée, [1] ont supposé

$$\langle \delta V_0, \delta V(t) \rangle = 0 \text{ (H3)} \quad \text{et} \quad \langle \delta \Gamma(t), \delta \Gamma(\tau) \rangle = R(\sigma) \text{ (H4)} \quad \text{où } \sigma = t - \tau.$$

Avec H3 l'analyse de (1), (2) et (3) est repoussée à des temps pour lesquels les paires n'ont plus en mémoire leur origine. H4 suppose que les corrélations des accélérations relatives sont statistiquement stationnaires. Dans ce cas, (1), (2) et (3) se simplifient et deviennent

$$(4) \quad \langle \|\delta V(t)\|^2 \rangle = \langle \|\delta V_0\|^2 \rangle + 2t I_1(t) \left[1 - \frac{1}{t} \frac{I_2(t)}{I_1(t)} \right]$$

$$(5) \quad \frac{1}{2} \frac{dD^2}{dt} = \langle \|\delta V_0\|^2 \rangle + t I_1(t) \left[1 - \frac{1}{t} \frac{I_2(t)}{I_1(t)} \right]$$

$$(6) \quad D^2(t) = D_0^2 + \langle \|\delta V_0\|^2 \rangle t^2 + \frac{2}{3} t^3 I_1(t) \left[1 - \frac{3}{2t} \frac{I_2(t)}{I_1(t)} - \frac{1}{2t^3} \frac{I_3(t)}{I_1(t)} \right]$$

où

$$I_1(t) = \int_0^t R(\sigma) d\sigma, \quad I_2(t) = \int_0^t \sigma R(\sigma) d\sigma \quad \text{et} \quad I_3(t) = \int_0^t \sigma^3 R(\sigma) d\sigma.$$

Si, pour $t > t_*$, on peut admettre que $I_1(t) \cong I_1(t_*) = A(C_1)$, $I_2/I_1 \ll t(C_2)$ et $I_3/I_1 \ll t^3(C_3)$, alors (4), (5) et (6) présentent les comportements quasi asymptotiques suivants :

$$(7) \quad \langle \|\delta V(t)\|^2 \rangle \cong 2A t; \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} D^2 \cong A t^2; \quad D^2(t) \cong \frac{2}{3} A t^3.$$

Les hypothèses H3, H4, C1-C3 ainsi que les évolutions (7) dégagées par [1] sont cohérentes avec les conditions d'application et les résultats de la théorie autosimilaire de

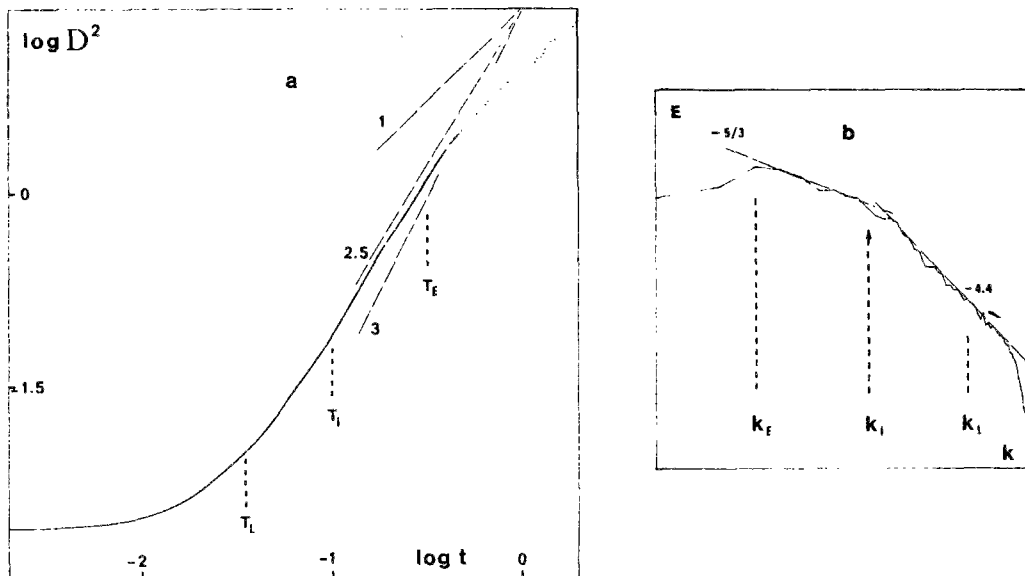


Fig. 2. — (a) Évolution de D^2 en fonction de t (log-log). (b) Spectre eulérien d'énergie (log-log).
 Fig. 2. — (a) D^2 evolution according to time (log-log scale). (b) Eulerian energy spectrum (log-log scale).

Kolmogorov et Obouhov dans une cascade d'énergie, dans la limite d'un nombre de Reynolds infini. Par contre, l'approximation (6) ne semble pas être compatible avec une évolution exponentielle de D^2 pour $t < t_*$. Les hypothèses $C_1 - C_3$ étant des conséquences naturelles de H4 la question fondamentale est la suivante : quel est le biais introduit par H3 et H4 dans l'analyse des relations primitives (1), (2) et (3)? Si on admet H3 et H4, alors une simple combinaison de (4) et (5) montre que dans ce cas on doit vérifier

$$(8) \quad \frac{d}{dt} D^2 = [\langle \|\delta \mathbf{V}_0\|^2 \rangle + \langle \|\delta \mathbf{V}(t)\|^2 \rangle] t.$$

Les courbes (1) de la figure 1a représentent les évolutions expérimentales des termes de gauche (g) et de droite (d) de l'équation (8). L'échelle intégrale lagrangienne T_L ainsi que les temps T_I et T_E nécessaires pour que la dispersion soit respectivement de l'ordre de l'échelle d'injection et de l'échelle la plus énergétique sont indiquées (voir également la figure 2b). On constate que H4 provoque une surestimation croissante du coefficient de dispersion pour des temps supérieurs à T_L . Ces expériences numériques utilisent le modèle eulérien de résolution (128^2) décrit et utilisé dans [2] et [3]. Le spectre d'énergie $E(k) \cong k^{-\alpha}$ (fig. 2b) présente de part et d'autre du nombre d'onde d'injection $k_i = (0,10)$ un domaine inertiel d'enstrophie pour $k > k_i$ ($\alpha = 4,4$) et une cascade inverse d'énergie pour $k < k_i$ ($\alpha \cong 5/3$). La moyenne porte sur 1024 paires de traceurs éloignés à $t=0$ d'un pas de maille soit $D_0 = 2\pi/128$. Le schéma lagrangien est du type Runge-Kutta d'ordre 2.

3. FORMULATION DIRECTE. — En combinant les relations primitives (2) et (3) obtenues avec H1 et H2 uniquement, on ramène cette fois-ci le problème de la dispersion relative à la résolution de l'équation différentielle suivante

$$(9) \quad \frac{d}{dt} D^2 - \frac{D^2 - D_0^2}{t} = \langle \|\delta \mathbf{V}(t)\|^2 \rangle t - \frac{\Theta(t)}{t}$$

où $\Theta(t) = \left\langle \left\| \int_0^t \tau \delta \Gamma(\tau) d\tau \right\|^2 \right\rangle$ est le terme qui prend en compte les instationnarités associées aux corrélations des accélérations relatives. Les courbes (2) de la figure 1a

représentent les évolutions des termes de gauche (g) et de droite (d) de l'équation (9) mesurées dans les mêmes conditions que pour (8). Leurs comportements confondus témoignent de l'exactitude de (9) dans les limites des hypothèses H1 et H2. La solution générale de l'équation (9) est donnée par

$$(10) \quad D^2(t) = D_0^2 + t \int_0^t F_1(\tau) F_2(\tau) d\tau$$

avec :

$$F_1(t) = \langle \|\delta \mathbf{V}(t)\|^2 \rangle, \quad F_2(t) = \left[1 - \frac{\Theta(t)}{\langle \|\delta \mathbf{V}(t)\|^2 \rangle t^2} \right].$$

Les lois de dispersion sont parfaitement déterminées par $\langle \|\delta \mathbf{V}(t)\|^2 \rangle$ et $\Theta(t)$. En particulier, la loi en t^3 pour D^2 répond au cas où $\langle \|\delta \mathbf{V}(t)\|^2 \rangle$ est en t et $\Theta(t)$ est en t^3 . Tel est le cas dans les limites de H3, H4, C1-C3 où $\langle \|\delta \mathbf{V}(t)\|^2 \rangle$ est donnée par (7) et $\Theta(t)$ est exactement le dernier terme de (6) comme le montrent (8) et (9). Mais la figure 1a indique que pour des temps suffisamment grands devant T_L ces comportements correspondent à une surestimation de la dispersion. Les évolutions de $F_1(t)$, $F_2(t)$ et de leurs produits sont représentées dans la figure 1b. La borne inférieure de $F_1(t)$ (petits temps) est imposée par la fonction de structure eulérienne à l'échelle D_0 qui, comme l'ont montré [4], est fonction de l'enstrophie; sa borne supérieure (grands temps) est quatre fois l'énergie cinétique de la turbulence. Entre ces deux limites $F_1(t)$ évolue, dans notre expérience, linéairement au voisinage de T_L et en $t^{1/2}$ pour $T_L < t < T_E$. $F_2(t)$ décroît entre 1 et 0 mais pour $T_L < t < T_E$ il est pratiquement constant. Le produit $F_1 \cdot F_2$ présente trois comportements : il est constant jusqu'à T_L , croît en $t^{1/2}$ entre T_L et T_E et décroît pour $t > T_E$. Les conclusions essentielles sont les suivantes :

(i) l'évolution exponentielle n'est dans aucun intervalle temporel solution naturelle de (9); pour $t \leq T_L < T_E$, le fait que $F_1 \cdot F_2$ demeure constant prolonge jusqu'à T_L le comportement quadratique asymptotique de D^2 ; on peut montrer que ceci est valable dès que le spectre lagrangien d'énergie est plus pentu que -1 ;

(ii) pour $T_L \leq t \leq T_E$ l'évolution temporelle de l'intégrande de (10) est de dominante $t^{1/2}$; $D^2(t)$ croît en $t^{5/2}$, c'est-à-dire moins vite que les estimations de Richardson et des analyses phénoménologiques.

Dans les figures 2a et b, le comportement global de $D^2(t)$ peut être comparé à celui du spectre eulérien d'énergie $E(k)$. Dans l'intervalle temporel $T_L \leq t \leq T_E$ qui correspond à des séparations spatiales appartenant aussi bien au domaine inertiel d'enstrophie qu'au domaine inertiel d'énergie, l'évolution de D^2 s'organise selon une loi de dominante $t^{5/2}$ de part et d'autre de T_L .

Reçue le 30 mars 1987, acceptée le 6 avril 1987.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] C. C. LIN et W. H. REID, *Turbulent flow. Theoretical aspect*, Handbuch der Physik, Bd VIII/2, Berlin-Göttingen, Heidelberg, Springer, 1963.
- [2] A. BABIANO, C. BASDEVANT, P. LE ROY et R. SADOURNY, *J. of Marine Research*, 45, 1987, p. 107-131.
- [3] C. BASDEVANT, B. LEGRAS, R. SADOURNY et M. BÉLAND, *J. Atmos. Sc.*, 38, 1981, p. 2305-2326.
- [4] A. BABIANO, C. BASDEVANT et R. SADOURNY, *J. Atmos. Sc.*, 42, 1985, p. 941-949.

Laboratoire de Météorologie dynamique, École normale supérieure, 24, rue Lhomond, 75231 Paris Cedex 05.

Annexe 3: Dispersion relative, article soumis au Journal of Fluid Mechanics.

RELATIVE DISPERSION IN TWO-DIMENSIONAL TURBULENCE

A. Babiano, C. Basdevant, P. Le Roy and R. Sadourny

*Laboratoire de Météorologie Dynamique
Ecole Normale Supérieure, Paris Cedex 05*

Submitted to J. Fluid Mech.

ABSTRACT

In this paper we study the statistical laws of relative dispersion by deriving an exact equation governing its evolution in time, then evaluating the magnitude of its various terms in numerical experiments, which allows us to check the validity of the classical dispersion laws: the Richardson-Obukhov t^3 law in the energy cascade range, and the Lin-Kraichnan exponential law in the enstrophy cascade range. It is found that the t^3 law is probably a good estimation but not because of the Lin and Reid assumptions: in fact it is impossible to neglect the nonstationarity of the correlations of relative acceleration; and that the exponential law is not universal, but valid only in the vicinity of scales where dispersion is most efficient.

A. Babiano, C. Basdevant, P. Le Roy and R. Sadourny

1. INTRODUCTION

In two previous articles - Babiano, Basdevant and Sadourny (1985), Babiano, Basdevant, Le Roy and Sadourny (1987), BBS and BBLS, to condense - we re-examined, in the particular context of two-dimensional incompressible turbulence, the relative and single-particle dispersion laws, and their links with the scale dependency of Eulerian and Lagrangian energy spectra. The objective of the following work is to complete the analyses developed in BBS concerning the relative dispersion, and to bring it in new theoretical formulations whose verification by direct numerical experimentation is done in a relative simple manner.

The fundamental results on turbulent relative dispersion are essentially derived from Batchelor's works as well as from a number of approaches inspired from Kolmogorov's and Obukhov's self-similar theory: for an extensive review see Monin and Yaglom (1975) and Bennett (1987). In the case of two-dimensional turbulence, these classic approaches result in the following behaviours for the relative dispersion coefficient (Kraichnan (1966), Lin (1972) and Bennett (1984)):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} D^2 &\sim D^{4/3} && \text{in the energy cascade} \\ &&& \text{(C.R.)} \\ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} D^2 &\sim D^2 && \text{in the enstrophy cascade} \end{aligned}$$

The 4/3-exponent law (Richardson's - Obukhov's law) corresponds to a cubic growth with time of the mean squared relative displacement D^2 :

$$D^2 \sim t^3, \quad \text{in the energy cascade} \quad \text{(C.R.1)}$$

while the 2-exponent law corresponds to an exponential growth:

$$D^2 \sim \exp\left[c \frac{t}{\tau_*}\right] \quad \text{in the enstrophy cascade} \quad \text{(C.R.2)}$$

Here c is a non dimensional constant and τ_* the characteristic dispersion time, defined, in the local case, by the enstrophy cascade rate and in the non-local case, by enstrophy. The results (C.R.1) and (C.R.2) have found a relative qualitative confirmation through the experiments of Morel et al. (1974) and Er-El et al. (1981) in the atmosphere, Price (1981) and the experiments summarized in Okubo (1971) and Anikiev et al. (1985) in the ocean.

After a quick review (sections 3 and 4) of the results given in BBS and

BBLS, we shall show in section 5 how the relative dispersion law can be formulated as a kinematic equation; the classic results (C.R.1) and (C.R.2) will then be faced to both solutions of this kinematic equation and results from numerical experiments. In section 6 and 7 we shall examine the sufficient conditions to enable (C.R.1) and (C.R.2) to be observed. The Eulerian numerical simulation and the Lagrangian experiments are described in Appendix 1.

2. DEFINITIONS.

We are interested in the dispersion of particle pairs which, initially separated by a given distance $D_0 = \|D_0\|$, are advected by a turbulent stationary field. For every pair of particles with Lagrangian coordinates a_1 and a_2 ($D_0 = a_1 - a_2$), the separation vector D at time t is expressed through D_0 and the absolute displacement vector A by :

$$D(t) = D_0 + [A(a_1, t) - A(a_2, t)]$$

where A is defined in terms of the Lagrangian velocity field V by

$$(1) \quad A(a, t) = \int_0^t V(a, \tau) d\tau$$

Defining the relative velocity vector $\delta V = d/dt D$ and the relative acceleration vector $\delta \Gamma = d/dt \delta V$, one can write:

$$(2) \quad D(t) = D_0 + \int_0^t \delta V(\tau) d\tau,$$

$$(3) \quad \delta V(t) = \delta V_0 + \int_0^t \delta \Gamma(\tau) d\tau$$

Denoting by $\langle . \rangle_a$ the average over all particles and by $\langle . \rangle$ the average over all particle pairs, the absolute dispersion and the relative dispersion are defined by

$$(4) \quad A^2(t) = \langle A(a, t) \cdot A(a, t) \rangle_a$$

$$(5) \quad D^2(t) = \langle D(t) \cdot D(t) \rangle$$

The absolute and relative dispersion coefficients $K(t)$ and $Y(t)$ are defined by

$$(6) \quad K(t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} A^2(t) = \langle A(a, t) \cdot V(a, t) \rangle_a$$

$$(7) \quad Y(t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} D^2(t) = \langle D(t) \cdot \delta V(t) \rangle$$

Using (6) and (1) we obtain:

$$(8) \quad K(t) = \int_0^t \langle \mathbf{V}(\mathbf{a}, t) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{a}, \tau) \rangle_{\mathbf{a}} d\tau ;$$

similarly from (7) and (2) :

$$(9) \quad Y(t) = \langle \mathbf{D}_0 \cdot \delta \mathbf{V}(t) \rangle + \int_0^t \langle \delta \mathbf{V}(t) \cdot \delta \mathbf{V}(\tau) \rangle d\tau ,$$

If the turbulence is homogeneous, and if the dispersion of particle pairs makes this homogeneity clear, the following condition is verified :

$$H1 : \langle \mathbf{D}_0 \cdot \delta \mathbf{V}(t) \rangle = 0$$

Assuming condition H1 and using (8), (9) can be expanded into

$$(10) \quad Y(t) = 2 K(t) - 2 \int_0^t \langle \mathbf{V}(\mathbf{a}_1, t) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{a}_2, \tau) \rangle d\tau$$

Absolute dispersion (4,8) in two dimensional turbulence can be studied within the framework of Taylor's classic analyses, as shown in BBLS. However, the same approach applied to relative dispersion (5,9,10) runs into a difficulty which stems from the fact that the Lagrangian correlations of relative velocities and relative accelerations are not statistically stationary.

3. INSTANTANEOUS RELATIVE DIFFUSIVITY.

In the framework of H1 and definition (7), $Y(t)$ vanishes at $t=0$, i.e. at the scale $D=||\mathbf{D}_0||$. In this case, in studying relative dispersion at a given scale D , it is convenient to use an alternative relative dispersion coefficient: the coefficient of instantaneous relative dispersion $X(D)$ defined by

$$(11) \quad X(D) = \left\{ \left\langle \left[\frac{1}{2} \frac{d||\mathbf{D}||^2}{dt} \right]^2 \right\rangle \right\}^{1/2} = \left\{ \left\langle [\mathbf{D} \cdot \delta \mathbf{V}(\mathbf{D})]^2 \right\rangle \right\}^{1/2}$$

which can be also expressed with the aid of the second order longitudinal structure function $S_{//}(D)$:

$$(12) \quad X(D) = [S_{//}(D)]^{1/2} D$$

The study of instantaneous relative diffusivity (12) is developed in BBS; it is shown to be an Eulerian characteristic of the flow, linked to the variance of the separation velocity and the Eulerian energy spectrum. The characteristic time of instantaneous relative dispersion is defined by

$$(13) \quad \tau_X(D) = \frac{D^2}{X(D)}.$$

The asymptotic behaviours of X and τ_X at small scales are given by

$$(14) \quad D \rightarrow 0 : \quad X(D) \approx 1/2 Z^{1/2} D^2 \quad ; \quad \tau_X(D) \approx 2 Z^{-1/2}$$

where $Z=1/2 \langle ||\text{curl } \mathbf{V}||^2 \rangle_{\mathbf{x}}$ is the enstrophy of the flow and $\langle . \rangle_{\mathbf{x}}$ is the average over all Eulerian position vectors \mathbf{x} .

For an Eulerian energy spectrum $E(k) = k^{-m}$ in a wave number range $k_1 \ll k \ll k_2$ three cases are to be considered:

$$(15) \quad \begin{aligned} & \text{i) } m < 1 : X(D) \sim D, \tau_X(D) \sim D \\ & \text{ii) } 1 < m < 3 : X(D) \sim D^{\frac{m+1}{2}}, \tau_X(D) \sim D^{\frac{3-m}{2}} \\ & \text{iii) } m > 3 : X(D) \sim D^2, \tau_X(D) \sim \text{const.} \end{aligned}$$

The asymptotic limit at vanishing spatial scales (14) is more than an asymptotic one; it extends for $m > 3$ in the whole Eulerian enstrophy self-similar range. Note that (15) is consistent with local ($m < 3$) and non-local ($m > 3$) results (C.R.). Indeed, for example $m=5/3$ leads to a $D^{4/3}$

dependency for $X(D)$ in (15); however, due to the definition (11) of $X(D)$, this law cannot be integrated in time to obtain a time dependency of D^2 such as the one given in (C.R.1) and (C.R.2).

In fact the detailed demonstration of (14) goes through Taylor expansion of the velocity. At first order the squared velocity difference involved in the definition of the structure function is expressed by means of the velocity gradient norm. When statistics are taken over the whole domain it turns out, in the present case of two-dimensional incompressible flows, that the mean squared velocity gradient is equal to mean squared vorticity :

$$||\nabla \mathbf{V}||^2 = (\omega^2 + s_1^2 + s_2^2)/2, \quad \omega = \partial_x v - \partial_y u, \quad s_1 = \partial_x u - \partial_y v, \quad s_2 = \partial_x v + \partial_y u$$

$$< ||\nabla \mathbf{V}||^2 >_x = < \omega^2 >_x = < s_1^2 + s_2^2 >_x.$$

These relations hold under adequate boundary conditions like vanishing velocities at boundaries or periodicity of the flow.

Thus (14) may be also written

$$X(D) \approx 1/2 < ||\nabla \mathbf{V}||^2 >_x D^2 \quad \text{when } D \rightarrow 0.$$

Consequently, it should be kept in mind that the characteristic time (14) constructed on enstrophy is a global one. There are cases, however, where one is rather interested in local statistics: this happens for statistically inhomogeneous flows, or when one looks at a particular realization of an homogeneous flow. In these cases, the corresponding local characteristic time scales should be constructed on the mean squared velocity gradient rather than on the enstrophy.

4. SINGLE PARTICLE-DISPERSION.

The study of single-particle dispersion (4) and eddy diffusion coefficient (8) is developed theoretically and experimentally in BBLS. In this paper G.I. Taylor's classic behaviours

$$(16) \quad t \ll T_L : A^2(t) \sim 2 E t^2 ; K(t) \sim 2 E t$$

were examined in connection to the slope of the Lagrangian energy spectrum $L(\omega)$. In (16) T_L is the Lagrangian integral time scale and E is the mean Lagrangian kinetic energy defined by $E = 1/2 \langle ||V||^2 \rangle_a$. For a Lagrangian energy spectrum $L(\omega) = \omega^{-n}$ in a Lagrangian frequency domain $\omega_1 \ll \omega \ll \omega_2$ three cases are to be considered :

$$(17) \quad \begin{aligned} \text{i)} \quad n > 1 & : A^2(t) \sim t^2 ; K(t) \sim t \\ \text{ii)} \quad -1 < n < 1 & : A^2(t) \sim t^{n+1} ; K(t) \sim t^n \\ \text{iii)} \quad n < -1 & : A^2(t) \sim \text{const.}; K(t) = 0 \end{aligned}$$

Like in the Eulerian case, the asymptotic behavior (16) is more than an asymptotic one; in the sufficiently general case ($n > 1$) the single-particle dispersion $A^2(t)$ and the eddy diffusion coefficient $K(t)$ are given by (16). The frequency dependency of Lagrangian energy spectrum is not well known. In BBLS we noticed that cases i) and ii) are respectively observed for $t < T_L$ and $t > T_L$.

In homogeneous and isotropic two-dimensional turbulence, T_L is given by

$$(18) \quad T_L \approx [2\pi/3]^{1/2} Z^{-1/2} = 1.45 T_Z$$

where $T_Z = Z^{-1/2}$. The experimental results we shall present and comment upon, show that behaviour (16) occurs for $t \approx T_Z$.

At large times ($t > T_L$) we have shown in BBLS that

$$(19) \quad A^2(t) \approx 4 [2\pi/3]^{1/2} E T_Z t ; K(t) = K \approx 2 [2\pi/3]^{1/2} E T_Z$$

Like in (14), the expressions (18) and (19) can be generalized to the case of local statistics or other types of boundary conditions. In this case, the time T_Z should be constructed on the mean squared velocity gradient.

5. RELATIVE DISPERSION

a- *Theory: a differential equation to govern relative dispersion*

In this section we shall give a mathematical description of relative dispersion similar to that already explored in Lin (1960) and Lin and Reid (1963). Our approach is however fully rigorous, and, in the other hand, applicable to any time scale.

From (2), we get

$$\|\mathbf{D} - \mathbf{D}_0\|^2 = \left\| \int_0^t \delta \mathbf{V}(\tau) d\tau \right\|^2$$

which yields

$$(20) \quad t \frac{d}{dt} \|\mathbf{D} - \mathbf{D}_0\|^2 = 2t \delta \mathbf{V}(t) \cdot \int_0^t \delta \mathbf{V}(\tau) d\tau .$$

On the other hand, an integration by parts yields the identity

$$(21) \quad \int_0^t \delta \mathbf{V}(\tau) d\tau = t \delta \mathbf{V}(t) - \int_0^t \tau \delta \Gamma(\tau) d\tau ;$$

then (20) can be rewritten

$$\begin{aligned} t \frac{d}{dt} \|\mathbf{D} - \mathbf{D}_0\|^2 &= \left[t \delta \mathbf{V}(t) + \int_0^t \tau \delta \Gamma(\tau) d\tau + \int_0^t \delta \mathbf{V}(\tau) d\tau \right] \cdot \int_0^t \delta \mathbf{V}(\tau) d\tau \\ &= \left[t \delta \mathbf{V}(t) + \int_0^t \tau \delta \Gamma(\tau) d\tau \right] \cdot \int_0^t \delta \mathbf{V}(\tau) d\tau + \|\mathbf{D} - \mathbf{D}_0\|^2 . \end{aligned}$$

Using again (21):

$$(22) \quad t \frac{d}{dt} \|\mathbf{D} - \mathbf{D}_0\|^2 - \|\mathbf{D} - \mathbf{D}_0\|^2 = t^2 \|\delta \mathbf{V}(t)\|^2 - \left\| \int_0^t \tau \delta \Gamma(\tau) d\tau \right\|^2 .$$

Relation (22) is a differential equation which governs the time evolution of the separation \mathbf{D} of a particle pair.

Finally, averaging (22) over a set of particle pairs we find that the kinematic description of relative dispersion reduces to the resolution of

the following linear differential equation of the first order :

$$(23) \quad \frac{d}{dt} \langle ||\mathbf{D} - \mathbf{D}_0||^2 \rangle - \frac{\langle ||\mathbf{D} - \mathbf{D}_0||^2 \rangle}{t} = \langle ||\delta\mathbf{V}(t)||^2 \rangle - \frac{\Theta(t)}{t}$$

where $\Theta(t) = \langle ||\int_0^t \delta\Gamma(\tau) d\tau||^2 \rangle$ is the term which takes into account the non-stationary characteristics associated with correlations of the relative accelerations.

Equation (23) is exact and constitutes the major analytical result of this paper. The general solution for equation (23) is given by :

$$(24) \quad \langle ||\mathbf{D}(t) - \mathbf{D}_0||^2 \rangle = t \int_0^t F(\tau) d\tau \quad \text{with} \quad F(t) = \langle ||\delta\mathbf{V}(t)||^2 \rangle - \frac{\Theta(t)}{t^2}$$

Relation (24) indicates that the dispersion laws are completely determined by $\langle ||\delta\mathbf{V}||^2 \rangle$ and Θ . Within the limits of H1, equation (23) and its solution (24) become respectively :

$$(25) \quad \frac{d}{dt} D^2 - \frac{D^2 - D_0^2}{t} = \langle ||\delta\mathbf{V}(t)||^2 \rangle - \frac{\Theta(t)}{t} ,$$

$$(26) \quad D^2(t) = D_0^2 + t \int_0^t F(\tau) d\tau .$$

Equations (23) and (25) have been obtained from relations whose origins are strictly kinematic. Equation (23) is rigorous and equation (25) holds solely within H1's limits. In both cases the dynamics of the flow intervenes through $\langle ||\delta\mathbf{V}||^2 \rangle$ and Θ .

b- Asymptotic behaviours of relative dispersion

- At large times, the velocities of the two particles in a pair become decorrelated, so that

$$(27) \quad \langle ||\delta\mathbf{V}||^2 \rangle \sim 4 E \quad \text{when } t \rightarrow \infty$$

Further, assuming that the integral of the time correlation of relative

velocities involved in relation (9) converges, then

$$(28) \quad D^2(t) \sim t \quad \text{when } t \rightarrow \infty$$

which, together with (27), yields

$$(29) \quad \Theta \sim 4 E t^2 \quad \text{when } t \rightarrow \infty$$

• At small times, if D_0 is a small scale in the enstrophy range, the lower bound of $\langle ||\delta \mathbf{V}||^2 \rangle$ is a function of the enstrophy Z , as shown in BBS :

$$(30) \quad \langle ||\delta \mathbf{V}||^2 \rangle \sim 2 S(D_0) \sim Z D^2 \quad \text{when } t \rightarrow 0$$

The only thing we know *a priori* about Θ is its asymptotic behaviour for $t \rightarrow 0$:

$$(31) \quad \Theta \sim 1/4 \langle ||\delta \Gamma_0||^2 \rangle t^4 \quad \text{when } t \rightarrow 0$$

Then the asymptotic behaviour of (26) for small times is

$$(32) \quad D^2(t) = D_0^2 + 2 S(D_0) t^2 \quad \text{when } t \rightarrow 0$$

Relation (32) was previously considered by Hinze (1975) and Kraichnan (1966); its range of validity can be determined as a function of the slope of the Lagrangian energy spectrum.

From (10) and definition (1),

$$(33) \quad Y(t) = 2 K(t) - 2 \Phi \quad \text{with}$$

$$\Phi = \int_0^t \langle \mathbf{V}(\mathbf{a}_1, \tau) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{a}_2, \tau) \rangle d\tau = \langle \mathbf{V}(\mathbf{a}_1, t) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{a}_2, t) \rangle .$$

Using Cauchy- Schwarz inequality

$$|\Phi| \leq \langle || \mathbf{V}(\mathbf{a}, t) ||^2 \rangle_a^{1/2} \cdot \langle || \mathbf{A}(\mathbf{a}, t) ||^2 \rangle_a^{1/2}$$

The first term in the product refers to a mean Lagrangian energy and is therefore equal to $(2E)^{1/2}$; from (16)

$$|\Phi| \leq 2 E t \quad \text{for} \quad t \ll T_L .$$

which, combined to (16) and (33), yields

$$0 \leq Y(t) \leq 8 E t \quad \text{for} \quad t \ll T_L .$$

This derivation proves that the validity of the asymptotic behaviour (32) extends in fact to time scales of the order of T_L . This range of time scales corresponds to a frequency range where the Lagrangian energy spectrum is observed to be of the form ω^{-n} with $n>1$, independently of the eulerian spectral energy distribution. The experimental results we shall present and then comment upon, show that this time interval is perhaps better defined by $T_Z=Z^{-1/2}$ than by T_L and is small compared to the times T_I or T_E (T_I and T_E are a function of D_0) necessary for dispersion to reach the forcing scale or most energetic scales respectively. The interval of validity for behaviour (32) is consequently insufficient if one is interested in the whole of the enstrophy and energy inertial ranges. An important conclusion should be retained : in the sufficiently general conditions ($n>1$), the initial development of relative dispersion does not depend on the spectral distribution of energy; the dynamics play a role only through the mean quantity $S(D_0)$.

c- Numerical experiment

All the experimental results presented here come from numerical experiments which are described in Appendix 1.

To test experimentally the validity of equation (25) we plot in figure 1 the right-hand side and the left-hand side of that equation. The fact that the two curves are difficult to distinguish indicates clearly that in our simulation, equation (25) is well verified.

In figure 2 we plot the two terms $\langle ||\delta V||^2 \rangle$ and Θ which contain the dynamics of the flow in equation (25). The asymptotic behaviours (27) and (30) of $\langle ||\delta V||^2 \rangle$ are well recovered: for small times the curves start from levels growing with D_0 and reach the common final level $4E$ with various intermediate slopes (from t^1 to t^0). The asymptotic behaviours (29) and (31) of Θ are also experimentally well recovered. The most remarkable fact is that the curves are nearly superposed. This seems to indicate that Θ does not depend on D_0 . This could be due to the fact that the acceleration structure function involved in Θ (see above) does not depend itself on D_0 ; more precisely the Eulerian integral length scale of the acceleration field could be much smaller than the one of the velocity field. We hope that further studies about the acceleration field will help to analyse these behaviours.

Figure 3 shows the time evolution of the integrand $F(t)$ of (26) for various

D_0 . The curves clearly illustrate the fact that solution (26), i.e. $D^2(t)$, is sensitive to D_0 for dispersion times $t \leq T_E$. The asymptotic behaviour (32) extends here to a time of the order of T_Z . For times larger than T_E the integrand (26) converges to zero; this is consistent with the asymptotic behaviours (27) and (29).

Figures 4a and 4b show the time evolution of D^2 plotted in log-log scale. From the theory, we would expect a succession of four different behaviours: first, stationarity (32), followed by exponential growth (C.R.2) in the enstrophy inertial range, then a t^3 law (C.R.1) in the energy inertial range, and finally an asymptotic linear growth (28). But in fact we should remind that (C.R.1) and (C.R.2) are asymptotic laws which begin to be valid only when the observed separation scale is large enough compared to the separation scale D_0 at which the particle pairs have been released. In all our simulations, the initial stationarity is well verified. Among all experiments displayed in figures 4a-4b, only the one in figure 4b shows a clear saturation of the dispersion law in the enstrophy inertial range ($D < D_1$ where D_1 is the injection scale). It thus seems that the asymptotic law requires a value D/D_0 of the order of 30 to become established; in all experiments shown in figure 4a or 4c, the inertial range is not wide enough. We note however that the saturation law of $D^2(t)$ in figure 4b is a power law close to t^5 , in contradiction to the predicted exponential of (C.R.2). In the energy inertial range, the asymptotic t^3 prediction of (C.R.1) appears well verified for small enough values of the ratio $R = D_0/D_1$ (figure 4a). When the initial separation D_0 is not small, the growth of $D^2(t)$ can be significantly slower than the t^3 law. This is consistent with the results described in Anikiev *et al.* (1985) and Okubo (1971) where $D^2 \sim t^\beta$ with $2 < \beta < 3$ was found for ratios R larger than 0.1. Note also that Kowalsky (1981) has displayed numerical results similar to ours with R close to 0.3, in the framework of non statistically stationary decaying turbulence. Lastly, the behaviours at long times displayed by our experiments (figure 4a) sustain the prediction of linear growth (28), reached for scales significantly larger than D_E , the most energetic scale.

To summarize, all theoretical behaviours but the exponential law (C.R.2) have been sustained by our numerical experiments on the growth of relative dispersion. However, in the two inertial ranges, asymptotic laws can be reached only when the initial separation is small: the fact that we need roughly a ratio D/D_0 of the order of 30 to observe asymptotic laws there, may be important when interpreting *in situ* measurements. In the following sections, we shall return to a more thorough discussion of (C.R.1) and (C.R.2), in order to investigate their limit of validity.

6. THE " t^3 LAW".

In a rigorous approach the complete expressions of D^2 , Y and $\langle ||\delta\mathbf{V}||^2 \rangle$ are from definitions (2,3,7):

$$(34) \quad \langle ||\delta\mathbf{V}(t)||^2 \rangle = \langle ||\delta\mathbf{V}_0||^2 \rangle + 2 \int_0^t \langle \delta\mathbf{V}_0 \cdot \delta\Gamma(\tau) \rangle d\tau + \langle || \int_0^t \delta\Gamma(\tau) d\tau ||^2 \rangle$$

$$(35) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} D^2(t) = \langle ||\delta\mathbf{V}_0||^2 \rangle t + \langle \mathbf{D}_0 \cdot \delta\mathbf{V}(t) \rangle + \int_0^t (2t-\tau) \langle \delta\mathbf{V}_0 \cdot \delta\Gamma(\tau) \rangle d\tau + \\ + t \langle || \int_0^t \delta\Gamma(\tau) d\tau ||^2 \rangle - \langle \int_0^t \tau \delta\Gamma(\tau) d\tau \cdot \int_0^t \delta\Gamma(\tau) d\tau \rangle$$

$$(36) \quad D^2(t) = D_0^2 + \langle ||\delta\mathbf{V}_0||^2 \rangle t^2 + 2 \langle \mathbf{D}_0 \cdot \int_0^t \delta\mathbf{V}(\tau) d\tau \rangle + 2t \int_0^t (t-\tau) \langle \delta\mathbf{V}_0 \cdot \delta\Gamma(\tau) \rangle d\tau \\ + t^2 \langle || \int_0^t \delta\Gamma(\tau) d\tau ||^2 \rangle - 2t \langle \int_0^t \tau \delta\Gamma(\tau) d\tau \cdot \int_0^t \delta\Gamma(\tau) d\tau \rangle + \langle || \int_0^t \tau \delta\Gamma(\tau) d\tau ||^2 \rangle .$$

In a simplified approach of relations (34-36), Lin and Reid (1963) admitted, in addition to H1, the following hypotheses :

$$H2 : \langle \delta\mathbf{V}_0 \cdot \delta\mathbf{V}(t) \rangle = 0$$

$$H3 : \langle \delta\Gamma(t) \cdot \delta\Gamma(\tau) \rangle = R(\sigma) , \quad \sigma = t - \tau$$

With H2, the analysis of primitive relations (34-36) is displaced to times for which the pairs of particles no longer have memory of their origin; it corresponds approximately to assume $t > T_L$. H3 supposes that the correlations of relative accelerations are statistically stationary. In this case relations (34-36) simplify to:

$$(37) \quad \langle ||\delta\mathbf{V}(t)||^2 \rangle = \langle ||\delta\mathbf{V}_0||^2 \rangle + 2 t I_0(t) \left[1 - \frac{1}{t} \frac{I_1(t)}{I_0(t)} \right] ,$$

$$(38) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} D^2 = \langle ||\delta\mathbf{V}_0||^2 \rangle t + t^2 I_0(t) \left[1 - \frac{1}{t} \frac{I_1(t)}{I_0(t)} \right] ,$$

$$(39) \quad D^2(t) = D_0^2 + \langle ||\delta\mathbf{V}_0||^2 \rangle t^2 + \frac{2}{3} t^3 I_0(t) \left[1 - \frac{3}{2t} \frac{I_1(t)}{I_0(t)} + \frac{1}{2t^3} \frac{I_3(t)}{I_0(t)} \right] ;$$

where $I_0(t) = \int_0^t R(\sigma) d\sigma$, $I_1(t) = \int_0^t \sigma R(\sigma) d\sigma$, $I_3(t) = \int_0^t \sigma^3 R(\sigma) d\sigma$.

Following Lin and Reid (1963), we may admit that I_0 converges for large times:

$$I_0(t) \approx I_0(t^*) = \text{const.} \quad \text{for } t > t^*.$$

It follows that

$$I_1(t)/I_0(t) = o(t) ,$$

$$I_3(t)/I_0(t) = o(t^3) .$$

Then (34-36) yield the following asymptotic behaviours :

$$(40) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} D^2 \sim t^2 \quad \text{and} \quad D^2(t) \sim t^3$$

$$<||\delta \mathbf{V}(t)||^2> \sim t \quad \text{and} \quad \Theta(t) \sim t^3$$

where the last expression in (40) obtains by substituting (37-39) in (25).

Further we can derive from (37,38) the following equation valid at all times

$$(41) \quad \frac{d}{dt} D^2 = [<||\delta \mathbf{V}_0||^2> + <||\delta \mathbf{V}(t)||^2>] t .$$

The interest of equation (41) is that it reformulates the exact dispersion problem (25) under the restrictive hypotheses H2 and H3 of Lin and Reid (1963), yielding the classical Richardson law. (41) and (25) have the same asymptotic behaviour at small times. This would seem a paradox, because H2 and H3 need larger times to be verified; but it is consistent with the fact that the nonstationary terms omitted in (41) are negligible at small times. At large times on the other hand, (41) and (25) yield totally different asymptotic laws, (27-29) contradicting (40).

Hypothesis H2 is indeed verified for $t > T_L$; the assumption that I_0 converges at some characteristic time scale t^* is also reasonable if the Lagrangian time correlation of relative accelerations is indeed stationary. The weaker point in the Lin and Reid (1963) hypotheses is precisely this stationarity H3. The only way out of the contradiction is to suppose that H3 holds only for intermediate times ($t < T_E$); in that case the asymptotic

forms (40) would be only valid in a time span $t^* < t < T_E$, being replaced afterwards by the real asymptotic behaviours (27-29). This would explain why Richardson's law for the energy inertial range is asymptotically verified in our experiments.

In fact, direct testings of the validity of (41) can be performed on the basis of the numerical experiments described in Appendix 1. We plot in figure 5 the numerical values of both dD^2/dt and its approximation (41). This is in fact equivalent to compare (41) and (25), as we have seen above that (25) is very accurately verified in our numerical experiments. The wrong estimation of dispersion by (41) as soon as t gets larger than T_L , and not only for $t > T_E$, is obvious: there is apparently no intermediate times at which (41) would be valid. We conclude from this that the approximation of Lin and Reid (1963) does not hold and cannot explain the observed asymptotic validity of Richardson's law in our energy inertial ranges.

7. THE "EXPONENTIAL LAW".

a. Characteristic time from relative dispersion.

By analogy with definition (13) for $\tau_x(D)$, we shall define the characteristic time of relative dispersion by

$$(42) \quad \tau_Y(t) = \frac{D^2}{Y(t)} .$$

From BBS one may introduce the structural time

$$(43) \quad \tau_S(D) = \frac{D}{\sqrt{S(D)}} .$$

where $S(D) = 1/2 \langle ||\delta V(D)||^2 \rangle_x$, is the Eulerian second order structure function. According to (32) we may rewrite the following limited expansion for $t \leq T_Z$:

$$(44) \quad D^2(t) = D_0^2 + 2S(D_0) t^2 + o(t^4)$$

where there is no t^3 term because its coefficient is proportional to $d/dt \langle ||\delta V||^2 \rangle|_{t=0}$ which vanishes as shown by the experimental results displayed in fig. 2. From (44) one gets

$$(45) \quad Y(t) = 2S(D_0) t + \alpha t^3 + o(t^4)$$

where $\alpha = 1/6 Y'''(0)$.

We will show, in examining the characteristic time (42) deduced by (44) and (45), how the quadratic dispersion law (32), may be locally confused with an exponential law .

b. Time evolution of τ_Y .

From (42),(44) and (45) we can derive the dependency of the characteristic time τ_Y on time:

$$(46) \quad \tau_Y(t) \approx \frac{\tau_S^2(D_0) + \alpha'^2 t^2 + o(t^3)}{2 t} \quad \text{with} \quad \alpha' = \sqrt{2 \left[1 - \frac{\alpha D_0^2}{4 S^2(D_0)} \right]}$$

We see that τ_Y reaches a minimum value $\alpha' \tau_S(D_0)$ when $t = \tau_S(D_0)/\alpha'$, i.e. :

$$(47) \quad \tau_Y \left[\frac{\tau_S(D_0)}{\alpha'} \right] \approx \alpha' \tau_S(D_0)$$

We now consider a non-local Eulerian energy spectrum ($m > 3$) at a scale $k^{-1} \geq D_0$. From BBS we know that in an enstrophy cascade range, τ_S is constant and proportional to the inverse of the square root of enstrophy. In that case relation (47) can be rewritten

$$(48) \quad \tau_Y \left[\frac{T_Z \sqrt{2}}{\alpha'} \right] \approx \sqrt{2} \alpha' Z^{-1/2}$$

According to (14) or (15) ($m > 3$) we observe that τ_Y is comparable with τ_X only close to its minimum value. Strictly speaking, the classic analysis applied by J.T. Lin, R.H. Kraichnan and A.F. Bennett, is basically a dimensional analysis; it is then impossible to distinguish between the instantaneous relative dispersion and the mean relative dispersion. We may then conclude that C.R.2 is only valid in the vicinity of the minimum value (48). The initial time $t < T_Z$, during which τ_Y decreases, may be interpreted as the period during which particle pairs, initially randomly oriented, are reoriented by the velocity gradients. More precisely, it turns out that the minimum value of τ_Y is equal to $\tau_{S//}$, i.e., the longitudinal structural time considered in BBS. This corroborates the idea that at this time the particle separation no longer depends on the transversal velocity difference (see Monin and Yaglom (1975)).

c. Scale evolution of τ_Y .

Using relation (42) and (43), we may obtain τ_Y as a function of the mean separation $D(t)$:

$$(49) \quad \tau_Y(D_0, D) \approx \frac{\tau_S(D_0)}{\sqrt{2} D_0} \frac{\alpha'^2 D^2 + (2 - \alpha'^2)(D^2 - D_0^2)}{2 \sqrt{D^2 - D_0^2}}$$

For a fixed initial separation D_0 , the minimum of τ_Y is reached for

$D=(2+\alpha'^2)^{1/2} D_0 / \alpha'$; this clearly exhibits the D_0 dependency of Y which has been noticed by R.E. Davis (1983).

We now assume D_0 to be in the enstrophy range; so $\tau_s 2^{-1/2} = Z^{-1/2}$. Assuming (49), we may evaluate the second derivative with respect to D . In particular, for τ_Y minimum, this second derivative is given by

$$(50) \quad \frac{d^2}{dD^2} \tau_Y|_{\min.} \sim Z^{-1/2}$$

Thus, at the separation scale where τ_Y is minimum, the curvature of the characteristic time as function of the mean separation D is proportional to the inverse of the square root of the enstrophy. Two obvious cases are to be considered :

- i) whenever Z is large, τ_Y will be approximately constant near its minimum value for a long time, and the mean separation law is close, for these values of D , to the exponential law (C.R.2);
- ii) conversely, for small values of Z , the minimum of τ_Y is pronounced, and the mean separation law cannot be confused with an exponential law.

d- Experimental results.

Several characteristic times according to D are displayed in figure 6 : the experimental τ_Y defined from (48) ($D_0 = i.\Delta x = (5/16).i.D_1$, $i=1,2,3,5,10$ where Δx is the grid interval of the 256×256 grid used here - see Appendix 1) and $2^{1/2}\tau_s$. The experimental τ_Y decreases from infinity to a minimum value. When D_0 is in the enstrophy range this minimum value is in excellent agreement with the theoretical result (47,48) with $\alpha=0$. When D_0 is in the reverse energy cascade range the experimental results show that α cannot be neglected. Because the experimental minimum values of τ_Y are larger than the theoretical values obtained with $\alpha=0$, we conclude that in our experiment, α is negative. After the minima τ_Y increases, clearly diverging from τ_x . This sustains the idea that the D^2 exponential behaviour, strictly speaking, is a brief transient behaviour in a

neighbourhood of τ_Y minima only. For instance, when $D_0 = 1\Delta x$, we observe that τ_Y has increased by a factor 2 when $D = 3 D_0 \sim D_1$. Nevertheless one could find a D-range where τ_Y is approximately constant which would be consistent with (C.R.2). Note that this range is observed only when $t \sim T_Z$ and not when $t \gg T_Z$ contrary to Bennett's (1984) assumption. It is important to notice that this transient exponential behaviour can occur as well in the energy range as in the enstrophy range. In the enstrophy cascading range, as we have already noted, the asymptotic behaviour appears to be a steep (t^5) power law.

CONCLUSION

In this work we examined, both numerically and theoretically, the statistical laws governing relative dispersion of particle pairs advected in a two-dimensional turbulent, incompressible, homogeneous and stationary velocity field.

We obtained a rigorous differential equation governing relative dispersion. This differential equation, being based on simple kinematic relations between relative position, relative velocity and relative acceleration of particle pairs, is valid for both two- or three-dimensional dynamics.

Concentrating on the incompressible two-dimensional case we focused our analysis on the classical laws of Lin-Kraichnan (C.R.2) and Richardson-Obukhov (C.R.1). We showed that they are not universal, in contradiction to the "à la Kolmogorov" relative dispersion approaches. Critics against (C.R.1) and (C.R.2) are different:

- C.R.1 is an experimentally well verified estimation associated to an assumption which is *unnatural* to the concept of dispersion: the stationarity of relative velocity correlations and relative acceleration correlations. Our experimental results show that large scale dispersion strongly depends on the initial pair separation D_0 . More precisely, in a time range where dispersion reaches the scales located between the forcing scale D_f and the most energetic scales, the time evolution of D^2 is close to t^3 only if the ratio $R=D_0/D_f$ is small enough. But even in a stationary turbulence where a t^3 law is observed, the non-stationary correlations involved in relative dispersion, cannot indeed be approximated by stationary terms.

- C.R.2 is an approximation near a characteristic configuration of dispersion where τ_y is minimal. Moreover, the C.R.2 behaviour appears to have nothing to do with the dynamics of the enstrophy cascade. Our experiments show that a constant behaviour of τ_y can occur only near these minimal values associated to the scales of maximum efficiency of the turbulent diffusivity; i.e. when the pairs initially randomly oriented, reach in the mean an optimal alignment with the velocity gradients. It is only in this way that C.R.2 could be universal, not because of the self similar theory. In the enstrophy inertial range the τ_y minimum is $\tau_y = \tau_x = 2Z^{-1/2}$. This result, well verified in our experiments, gives a possibility to measure the enstrophy from dispersion experiments.

Acknowledgements:

The numerical computations were performed under contract number 14004 of the Centre de Calcul Vectoriel pour la Recherche.

APPENDIX 1 : THE EULERIAN NUMERICAL MODEL AND THE LAGRANGIAN EXPERIMENTS

In this work we use the Eulerian numerical simulation previously described in BBS and BBLs. The quasi-geostrophic barotropic vorticity equation

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + J(\psi, \omega) = F(\omega) + G(\omega)$$

is integrated on a doubly periodic square domain of side L , using a pseudo-spectral approximation (Basdevant *et al.*, 1981) on 256×256 , 1024×1024 and 1728×1728 grids. Here ψ refers to the streamfunction, ω to vorticity; $F(\omega)$ and $G(\omega)$ respectively to the forcing and dissipation terms. High resolutions 1024^2 and 1728^2 were required to study relative dispersion $D^2(t)$ in the case of very little initial separation D_0 (see 5c and 6). Except for the 1728^2 resolution, dissipation is defined as

$$G(\omega) = J[\psi, \theta(-l_c^2 \Delta)^4 J(\psi, \omega)] + t_d^{-1} l_d^{-2} \psi$$

where θ and t_d are characteristic times, l_c the cutoff scale and l_d the largest scales. Dissipation thus involves the parameterization of subgrid scale called "Anticipated Potential Vorticity Method" (APVM) (Sadourny and Basdevant (1985)), designed to dissipate only enstrophy near the cutoff scale, and a linear "friction" to dissipate energy at larger scales. In experiments hereafter denoted F40, the forcing is defined by keeping the amplitude of the zonal mode $k_1 = (0, 40)$ constant in time. In this way, even in the case of the 256^2 moderate resolution, we obtain a correct simulation of both the reverse energy and the direct enstrophy cascades because of the combined use of a large k_1 and the APVM. This is illustrated by the Eulerian energy spectrum (figures 7a and 7b) which behaves as $E(k) \sim k^{-m}$ on both sides of the injection wave-number k_1 , with an inertial enstrophy domain for $k > k_1$ ($m \geq 3$) and a reverse energy cascade for $k < k_1$ ($m \approx 5/3$); this is also well illustrated by the constancy of energy (figures 8a and 8b) and enstrophy (figure 9a and 9b) fluxes.

In the case of resolution 1728^2 , we use the dissipation

$$G(\omega) = -t_c^{-1} (-l_c^2 \Delta)^8 \omega + t_d^{-1} l_d^{-2} \psi$$

described in BBLs, where t_c is another characteristic time. The iterated Laplacian (Basdevant *et al.*, 1983) used here to dissipate essentially enstrophy near the cutoff scale is not as efficient as the APVM described above, to simulate the dynamics of the very small scales; but the APVM would have required too much memory. This choice has no consequence

both from the Eulerian and the Lagrangian view points:

- the resolution 1728^2 is high enough to guarantee a good simulation of the enstrophy cascade, as illustrated by the energy spectrum displayed in fig. 7c.
- we showed in 5b that the initial development of relative dispersion does not depend on the spectral distribution of energy.

These F40 experiments with various resolutions can be compared easily to one another because all are scaled with the same forcing scale; the results of the three different resolutions used are displayed on the same figure 4a. In one further experiment (F4 to condense) the forcing is applied on a smaller zonal mode $k_1=(0,4)$ with a 1024×1024 grid. With this choice we obtain a very wide enstrophy inertial range (see fig. 7d), which allows us to perform relative dispersion experiments with very small values of the ratio $R=D_0/D_1$ (see section 5c).

The Lagrangian motion is obtained by integrating the transport equation

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{V}(\mathbf{X}, t)$$

using a Runge-Kutta second order scheme (RK2)

$$\begin{cases} \mathbf{X}_1 = \mathbf{X}(t) + \Delta t \cdot \mathbf{V}(\mathbf{X}, t) \\ \mathbf{X}(t+\Delta t) = \mathbf{X}(t) + \frac{\Delta t}{2} [\mathbf{V}(\mathbf{X}, t) + \mathbf{V}(\mathbf{X}_1, t)] \end{cases}$$

where Δt is the time step of the Eulerian model. $\mathbf{V}(\mathbf{X}, t)$ and $\mathbf{V}(\mathbf{X}_1, t)$ are evaluated by linear interpolation within a mesh. The truncation error was investigated in great detail in BBLS in the case of an Euler advection scheme. Here the RK2 scheme used is more precise. The two schemes are compared in figure 10, where Euler corresponds to the dotted line, and RK2 to the solid line: the quantity displayed is the square displacement $A^2(t)$ of one particle advected around a strong vortex in a frozen field (i.e. an Eulerian field which does not change in time). In Euler's case, $A^2(t)$ never comes back to zero and increases in mean: this indicates that the trajectory is not circular but spiral. In the RK2's case the displacement vector regularly comes back to zero. The individual particle has turned around the vortex more than ten times on exactly the same trajectory as expected in a frozen field. This clearly indicates that with the RK2 scheme the numerical diffusion, which in BBLS was essentially noticed in the vicinity of the vortices, has become quite negligible.

At stationary régime conditions ($t=0$), a set of 1024 pairs of particles (4096 pairs for the resolutions 1024^2 and 1728^2) with all the same separation D_0 is released all over the entire domain and statistics leading to evaluation of mean relative dispersion are constructed for several values $D_0=i.\Delta x=R.D_1$ ($R=5.i/16$) where Δx is the grid interval of the 256×256 grid. Grids 1024×1024 and 1728×1728 with 4096 pairs are used only to study the possible power laws of $D^2(t)$ (see figures 4a and 4b). The various values of R and i and the values of the essential parameters used in our experiments are displayed in Table 1 and Table 2.

R	i	resolution used
1/128 \approx 0.0078	-	1024 ² (F4)
5/108 \approx 0.0463	4/27	1728 ²
5/64 \approx 0.0781	1/4	1024 ²
5/16 \approx 0.3125	1	256 ²
10/16 \approx 0.6250	2	256 ²
15/16 \approx 0.9375	3	256 ²
25/16 \approx 1.5625	5	256 ²
50/16 \approx 3.1250	10	256 ²

Table 1

$E = 113$	$312.5 \text{ cm}^2\text{s}^{-2}$
$Z = 57000$	0.29 days^{-2}
$T_L = 0.0135$	6 days
$T_I = 0.0126$	5.6 days $(D_0 = 1.\Delta x = 0.3125 D_I)$
$T_E = 0.0682$	30.2 days $(D_0 = 1.\Delta x = 0.3125 D_I)$
$T_Z = 0.0042$	1.9 days
$L = 2\pi$	4000 km
$D_I = 0.0785$	50 km
$D_E = 0.523$	333 km
$\Delta x = 0.0245$	15.6 km

Table 2

REFERENCES.

- Anikiev V.V., O.V. Zaytsev, T.V. Zaytseva and V.V. Yarosh , 1985 : Experimental investigation of the diffusion parameters in the ocean. *Izvestiya Atmospheric and Ocean Physics*, vol.21, N°.11, 931-934.
- Babiano, A., C. Basdevant, P. Le Roy and R. Sadourny, 1987 : Single-particle dispersion, Lagrangian energy spectrum in two-dimensional incompressible turbulence. *J. Mar. Res.*, 45, 107-131.
- Babiano, A., C. Basdevant and R. Sadourny, 1985 : Structure functions and dispersion laws in two-dimensional turbulence. *J. Atmos. Sci.*, 42, 942-949.
- Basdevant, C., B. Legras, R. Sadourny and M. Béland, 1981 : A study of Barotropic model flows : Intermittency waves and predictability. *J. Atmos. Sci.*, 38, 2305-2326.
- Bennett, A.F., 1984 : Relative dispersion: Local and non-local dynamics. *J. Atmos. Sci.* 41, 1881-1886.
- Bennett, A.F., 1987 : A Lagrangian analysis of turbulent diffusion. *Reviews of Geophysics*, vol.25, n°4, 799-822.
- Davis R. E., 1983 : Oceanic property transport, Lagrangian particle statistics, and their prediction. *J. Mar. Res.*, 41, 163-194.
- Er-El, J. and R. L. Peskin, 1981: Relative dispersion of constant-level balloons in the Southern Hemisphere. *J. Atmos. Sci.*, 38, 2264-2274.
- Hinze, J.O., 1975 : Turbulence. McGraw-Hill serie in mechanical engineering, 790.
- Kowalski A.D. and R.L. Peskin, 1981: Numerical simulation of relative dispersion in two-dimensional, homogeneous, decaying turbulence. *J. Fluid. Mech.*, 109, 45-61.
- Kraichnan R.H., 1966 : Dispersion of particle pairs in homogeneous turbulence. *Phys. Fluids*, vol.9, 10, 1937-1943.
- Lin C.C., 1960 : On a theory of dispersion by continuous movements. *Proc. Nat. Acad. Sci, Wash.*, 46, 566.
- Lin C.C. and W.H. Reid, 1963 : Turbulent flow. Theoretical aspects. *Handbuch der Physik*, Bd VIII/2, Berlin-Göttingen, Heidelberg, Springer.

Lin J.T., 1972 : Relative dispersion in the enstrophy cascading inertial range of homogeneous two-dimensional turbulence. J. Atmos. Sci., 29, 394-396.

Monin, A.S., and A.M. Yaglom, 1975 : Statistical Fluid Mechanics. The MIT Press, 874.

Morel P., and M. Larchevêque, 1974 : Relative dispersion of constant level balloons in the 200 mb general circulation. J. Atmos. Sci., 31, 2189-2195.

Okubo, A., 1971 : Oceanic diffusion diagrams. Deep Sea Res. 18, n° 8, 789-802.

Price, J., 1981 : Diffusion statistics computed from SOFAR float trajectories in the western North Atlantic. Unpublished proceedings of CAMS-WHOI Symposium on Lagrangian tracers. Woods Hole, March, 1981.

Sadourny, R., and C. Basdevant, 1985: Parameterization of Subgrid Scale Barotropic Eddies in Quasi-geostrophic Models: Anticipated Potential Vorticity Method. J. Atmos. Sci., 42, 1353-1363.

Figure caption

- Figure 1. The right-hand side and the left-hand side of equation (25). The Lagrangian integral time scale T_L and time T_E for $D_0=1.\Delta x$ are indicated. Δx is the grid interval of the 256x256 grid used here.
- Figure 2. The mean squared relative velocity and Θ as a function of time for various $D_0=i.\Delta x$ (see Appendix 1). The times T_I and T_E for $D_0=1.\Delta x$ are indicated; $\Delta x=(5/16)D_I$ is the grid interval of the 256x256 grid used here; (log-log scale).
- Figure 3. The time evolution of integrand $F(t)$ of (26) for various $D_0=i.\Delta x$ (see Appendix 1); $\Delta x=(5/16)D_I$ is the grid interval of the 256x256 grid used here. The times T_Z and T_E (a function of D_0) are indicated.
- Figure 4. Relative dispersion as a function of time for various $D_0=i.\Delta x$; $\Delta x=(5/16)D_I$ is the grid interval of the 256x256 grid used here; a) and b) log-log scale, c) lin-log scale. The scales D_I and D_E are indicated. Fig. 4a, relative dispersion with $D_0=\Delta x/4$ and $D_0=4.\Delta x/27$ is also plotted, using respectively the high resolutions 1024^2 and 1728^2 (see Appendix 1). Fig. 4b corresponds to the F4 experiment (see Appendix 1).
- Figure 5. The numerical values of both dD^2/dt (curve a) and its approximation (38) (curve b) for $D_0=(5/108)D_I$ i.e. with a

1728x1728 grid. The time T_L is indicated.

Figure 6. The characteristic time τ_y as a function of D for various $D_0=i.\Delta x$ (see Appendix 1); $\Delta x=(5/16)D_l$ is the grid interval of the 256x256 grid used here. The dotted curve corresponds to the function $2^{1/2}.\tau_s(D)$, which is equal to $\tau_x(D)$ in the enstrophy cascade range. The scales D_l and D_E are indicated.

Figure 7. Eulerian energy spectrum. Arrows indicate the injection wavenumber $k_l=\pi/D_l$ and the most energetic wavenumber $k_E=\pi/D_E$; the resolutions used are: a) 256^2 , b) 1024^2 , c) 1728^2 , d) 1024^2 for the F4 experiment (see Appendix 1); (log-log scale).

Figure 8. Energy fluxes; the resolutions used are a) 256^2 , b) 1024^2 ; (log-log scale).

Figure 9. Enstrophy fluxes; the resolutions used are a) 256^2 , b) 1024^2 ; (log-log scale).

Figure 10. Square displacement $A^2(t)$ of one particle using an Euler scheme (dotted line) and a second order Runge-Kutta scheme (solid line).

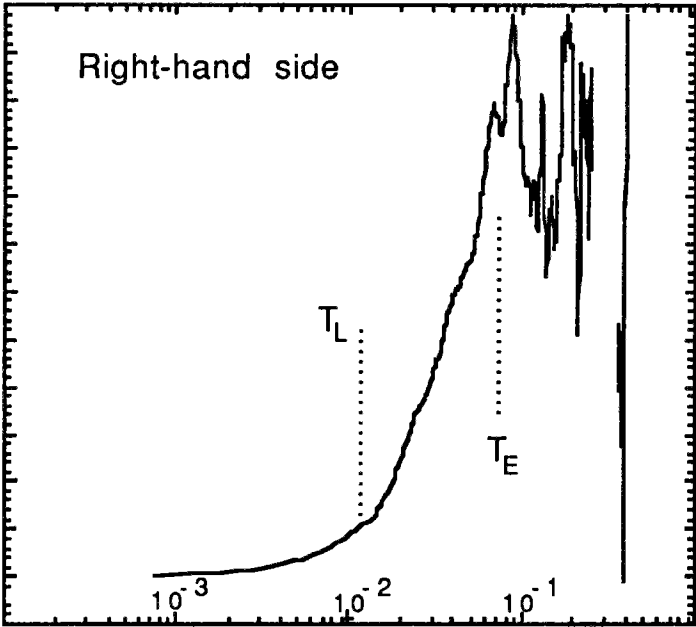


figure 1a

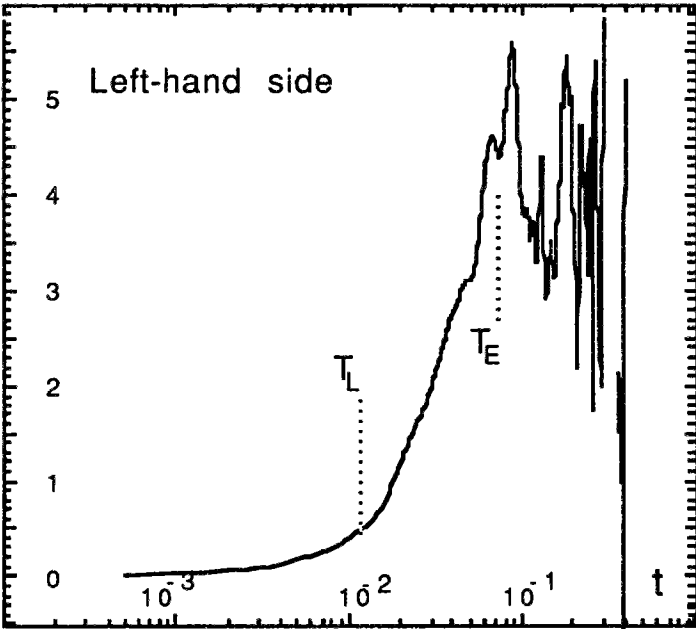


figure 1b

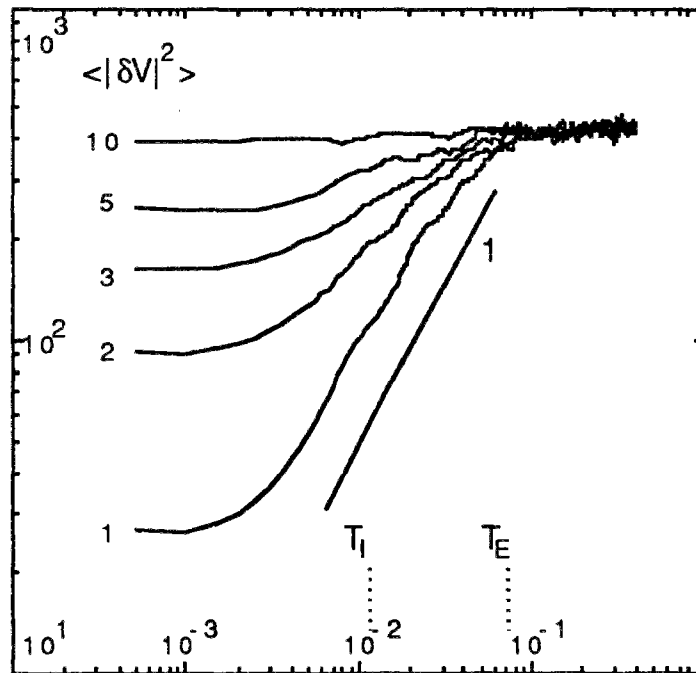


figure 2a

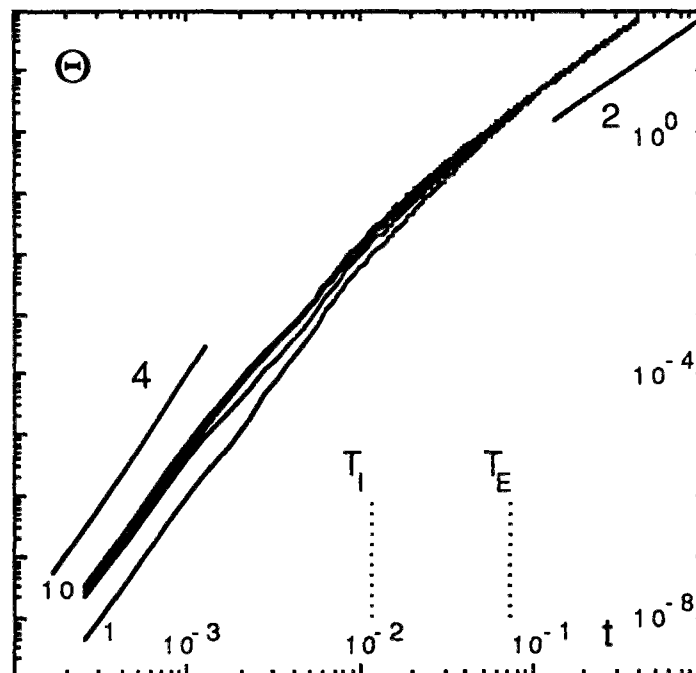


figure 2b

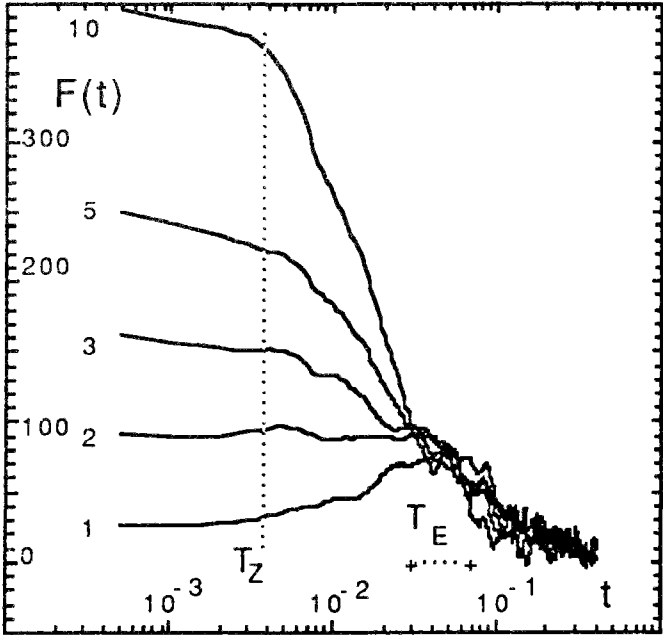


figure 3

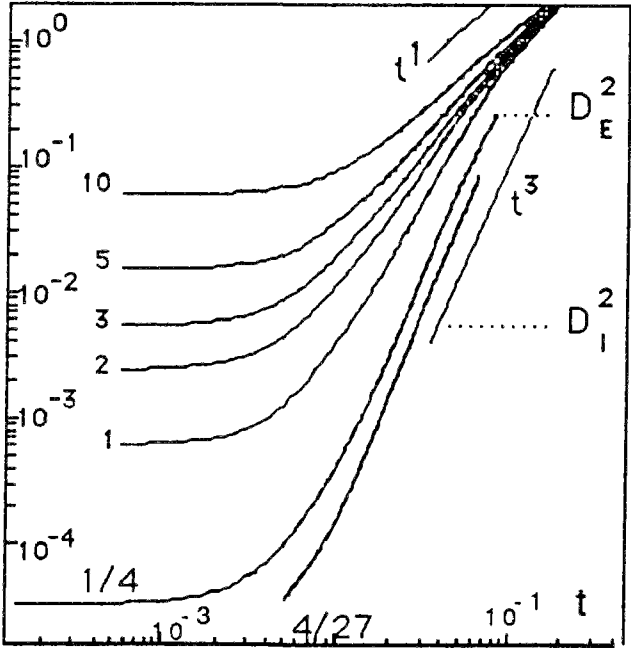


figure 4a

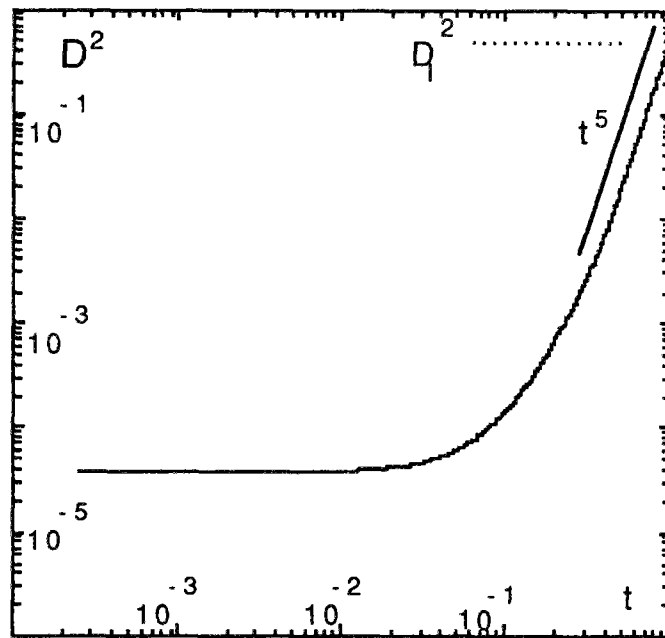


figure 4b

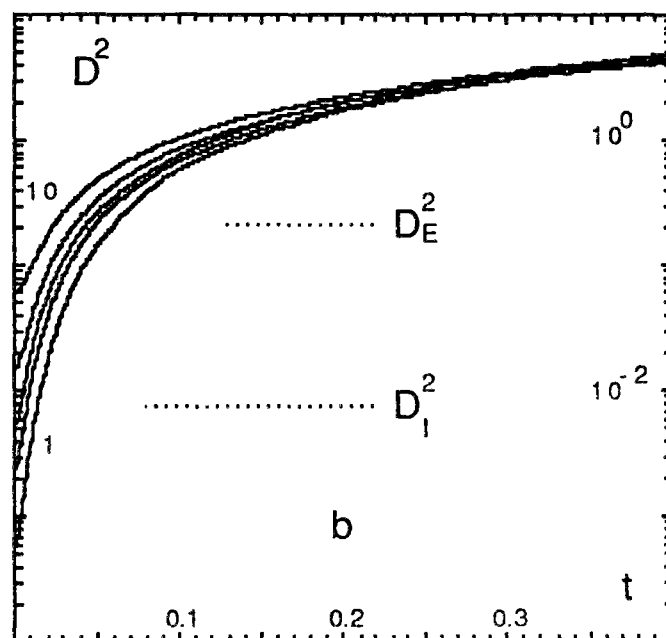


figure 4c

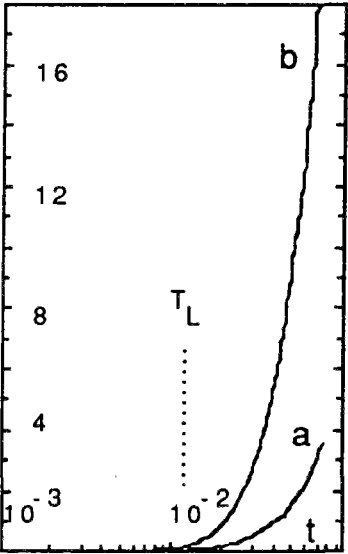


figure 5

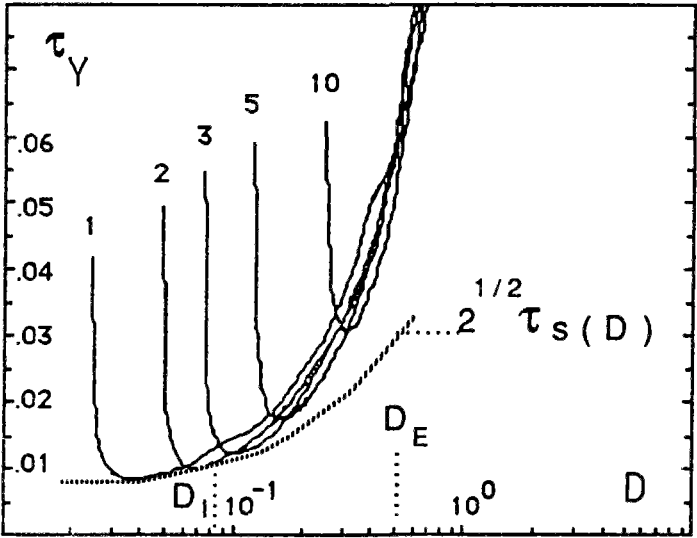


figure 6

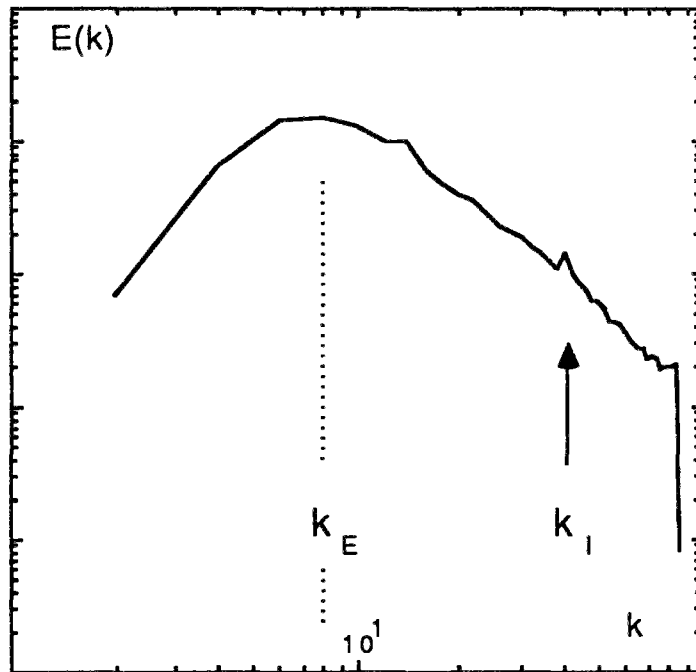


figure 7a

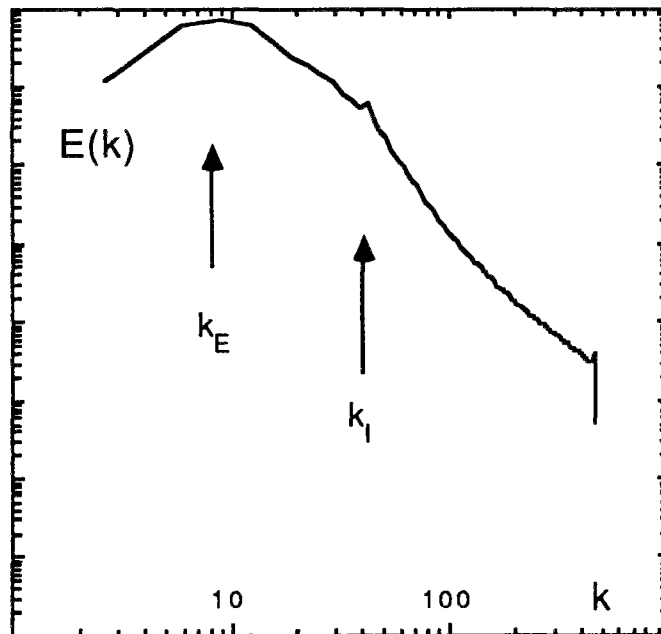


figure 7b

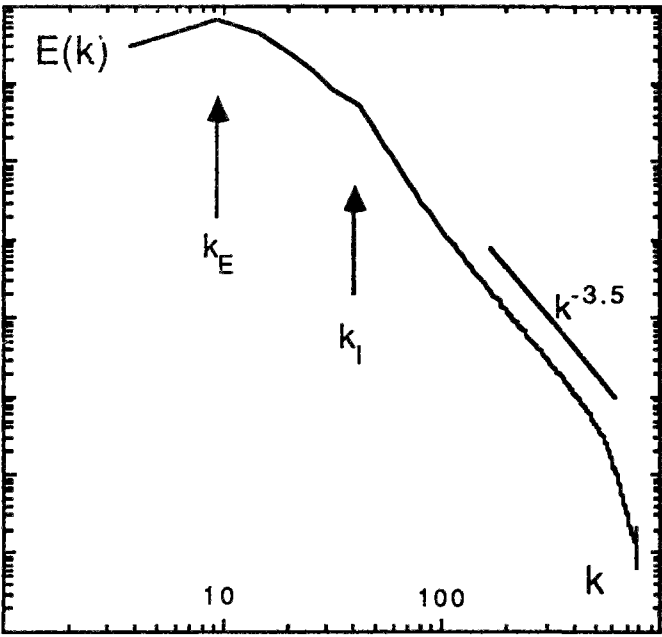


figure 7c

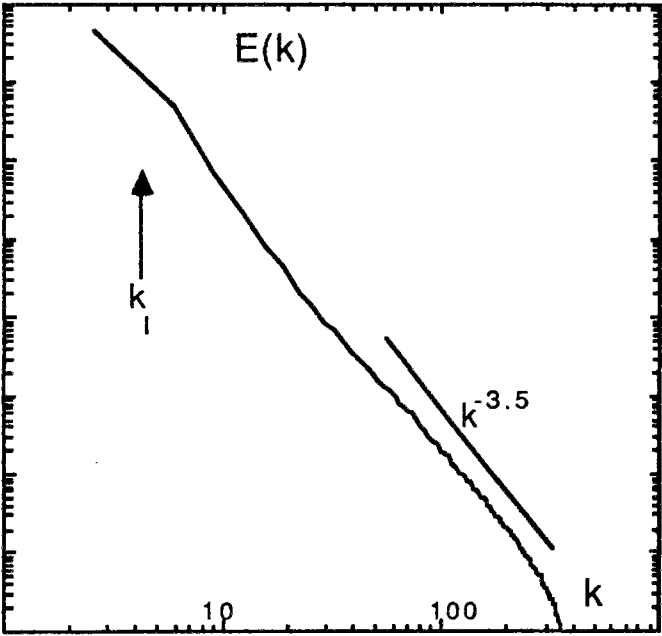


figure 7d

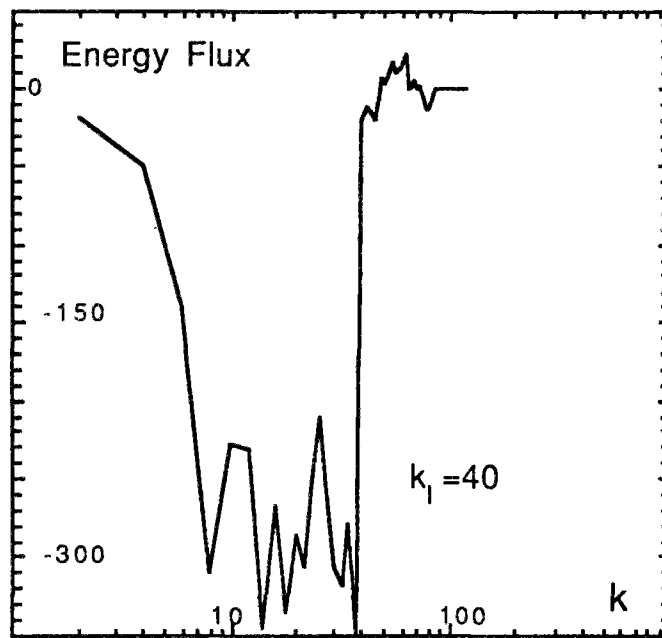


figure 8a

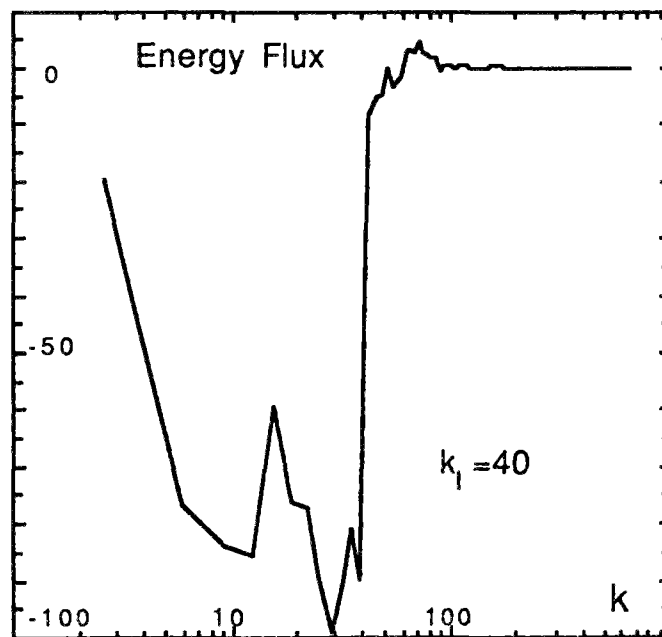


figure 8b

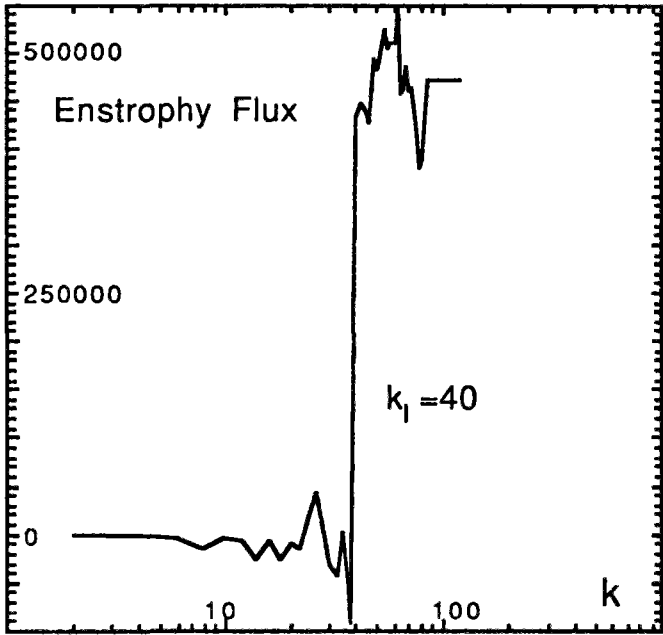


figure 9a

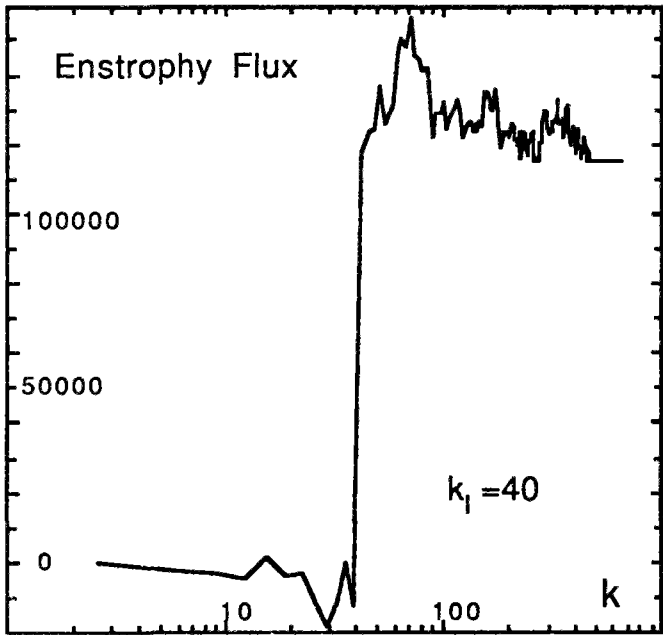


figure 9b



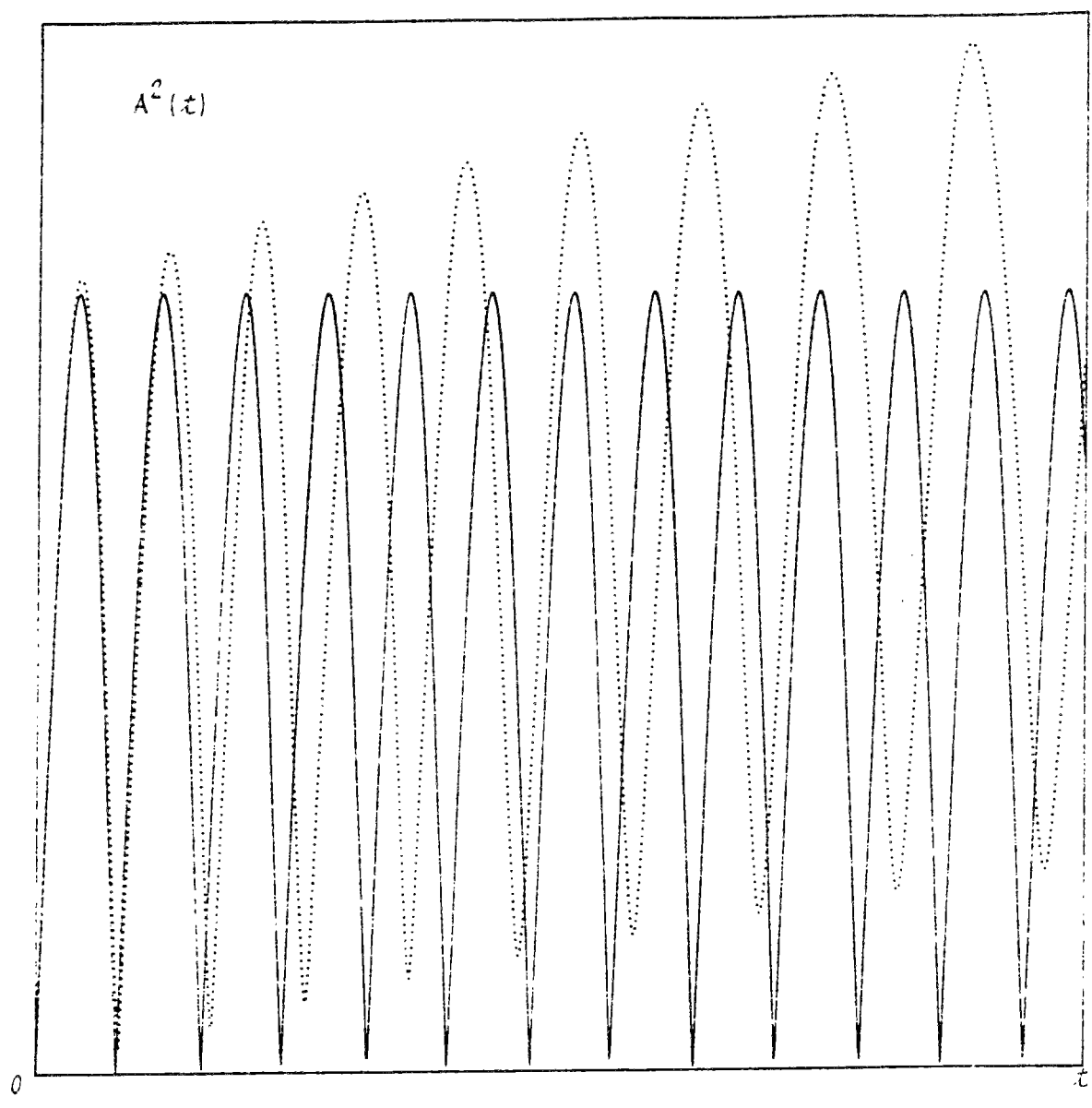


Figure 10

Annexe 4: Couche de mélange, article accepté par le Journal of Fluid Mechanics.

**THE MIXING LAYER AND ITS COHERENCE EXAMINED
FROM THE POINT OF VIEW
OF TWO- DIMENSIONAL TURBULENCE**

**Marcel Lesieur, Chantal Staquet
Pascal Le Roy and Pierre Comte**

Institut de Mécanique de Grenoble*

**Institut National Polytechnique de Grenoble
and
Université Scientifique et Médicale
BP 68 - 38402 Saint-Martin d'Hères, France.**

**Submitted to the Journal of Fluid Mechanics
Revised version May 1987**

* The Grenoble Institute of Mechanics is sponsored by the CNRS

ABSTRACT

A two-dimensional numerical large eddy simulation of the temporal mixing layer submitted to a white-noise perturbation is performed. It is shown that the first pairing of vortices having the same sign is responsible for the formation of a continuous spatial longitudinal energy spectrum of slope between k^{-4} and k^{-3} . After two successive pairings this spectral range extends to more than 1 decade. The vorticity thickness, averaged over several calculations differing by the initial white noise realization, is shown to grow linearly, and eventually saturates. This saturation is associated with the finite size of the computational domain. It is shown that the large scales, though spatially coherent, are extremely sensitive to initial conditions, and thus unpredictable. The inverse cascade of error through the kinetic energy spectrum is displayed.

From a three-dimensional point of view, a two-mode truncation of the velocity field involving a two-dimensional basic flow and a spanwise sine perturbation is developed. This truncation is shown to correspond to a two-dimensional predictability analysis, where the growth of the error energy can be identified with the mean three-dimensional kinetic energy of the sine perturbation. Numerical simulations involving successive pairings show an exponential growth of the three-dimensionality, whose saturation occurs together with the levelling-off of the vorticity thickness growth. Thus in an infinite domain, and in the presence of subharmonic perturbations (which are present in the initial white noise), the relative error (and hence the relative three-dimensionality) would grow exponentially, leading to three-dimensionalization of the layer and loss of coherence. We indicate also how a new coherent structure could then be recreated, using an eddy-viscosity assumption and the linear instability of the mean inflexional shear.

1 - INTRODUCTION

The mixing layer between two flows of velocities U_1 and U_2 has been extensively investigated experimentally these last 15 years: in particular Brown and Roshko (1974) showed the persistence far downstream of large structures (usually called "coherent") upon which small scale three-dimensional turbulence is superposed, and Winant and Browand (1974) observed the pairing of these structures. An extensive review of the subject has been given by Ho and Huerre (1984). Mixing layers are encountered in aerodynamics, in the atmosphere or the ocean (e.g. in the wake of mountains, in the Gulf Stream or in the Mediterranean sea), as well as in the

atmospheres of Jupiter and Saturn (at the interface between neighbouring zonal jets). Such a flow permits the study of transition to turbulence far from boundaries. The concept of coherence applied to the large structures is somewhat controversial (see e.g. Wood and Bradshaw, 1982). Other important questions are the relevance of the two-dimensional Navier-Stokes or Euler equations to describe properly the large quasi-two-dimensional scales, and how the latter interact with small scale three-dimensional turbulence. In this paper, we will examine the dynamics of the large scales of the mixing layer from the point of view of two-dimensional turbulence and of predictability theory, using numerical simulations.

In section 2, numerical large eddy simulations of the two-dimensional Navier-Stokes equations applied to the temporal mixing layer are presented; this type of calculation is not new (except for the higher spatial resolution employed here) and follows the work of Zabusky and Deem (1971), Couët and Leonard (1980), Riley and Metcalfe (1980), Aref and Siggia (1980), Cain et al. (1981) and Corcos and Sherman (1984). Here we focus on the longitudinal spatial spectral statistics of the flow associated with events occurring in the layer (i.e. growth of fundamental eddies and pairings), the latter being visualized by computer pictures displaying the vorticity field. We have also compared these statistics with the predictions for homogeneous isotropic two-dimensional turbulence and discuss the possibility for the mixing-layer coherent structures to be considered as a special case of two-dimensional turbulence.

In section 3, we perform a two-mode truncation of the three-dimensional mixing layer, consisting of a two-dimensional basic flow to which is superposed a sine perturbation in the spanwise direction. This truncation is shown to lead to a two-

dimensional predictability problem, where the sensitivity of the large scales to initial random two-dimensional perturbations of small amplitude superposed on the mean inflexional shear is examined. This permits us, from a two-dimensional predictability analysis, to draw information regarding the development of three-dimensionality, the mean three-dimensional kinetic energy of the sine perturbation corresponding to the error energy. We have thus performed numerical simulations of the two-dimensional mixing-layer predictability which show, for a temporal mixing layer extending in an infinite domain, an exponential growth of three-dimensionality (and thus a loss of coherence). These results will be discussed in comparison with the analysis of Pierrehumbert and Widnall (1982) and Corcos and Lin (1984). Section 4 discusses possible mechanisms for regeneration of the large coherent structures.

2 - TWO-DIMENSIONAL LARGE EDDY SIMULATIONS

2.1 - Equations and numerical model

Consider a two-dimensional incompressible flow with a stream function $\psi(x, y, t)$ satisfying the two-dimensional Navier-Stokes equation

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + J(., \psi) \right] \nabla^2 \psi = \nu \nabla^2 (\nabla^2 \psi) , \quad (2-1)$$

where $J(A, B)$ is the Jacobian operator $(\partial A / \partial x)(\partial B / \partial y) - (\partial A / \partial y)(\partial B / \partial x)$, whereas x , y , and z are respectively the streamwise, transverse and spanwise directions. Since we are mainly interested in a simulation of the large scales, the molecular viscous dissipative operator on the right-hand side of (2-1) will be re-

placed by a subgridscale dissipative term $-\nu_1(\nabla^2)^3\psi$, so that

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + J(., \psi)\right]\nabla^2\psi = -\nu_1\nabla^4(\nabla^2\psi). \quad (2-2)$$

This type of biharmonic dissipation is often used by oceanographers (see e.g. Holland 1978). Its utilization is of course open to debate, but it seems to allow a good description of the large scales of the flow, with dissipative effects shifted to the cutoff scale. It permits an artificial increase in the Reynolds number, and is consistent with a widely accepted point of view that, in high Reynolds number two-dimensional turbulence, the large scales are nearly inviscid, while the small scales dissipate vorticity fluctuations at a finite rate, as proposed by Batchelor (1969). It is not our aim here to investigate the validity of this subgridscale approximation for the mixing layer. This has been done by Basdevant and Sadourny (1983) in the case of homogeneous two-dimensional turbulence.

We have carried out a second-order, finite-difference numerical simulation of (2-2). The Jacobian terms are evaluated using Arakawa's formulation (1966) which conserves total kinetic energy and enstrophy and maintains the property

$$J(\nabla^2\psi, \psi) = -J(\psi, \nabla^2\psi).$$

The dissipative term is always lagged one time-step to avoid (linear) numerical instability. Using a second-order leapfrog technique for the time differencing, with an occasional Euler forward time-stepping to eliminate time splitting of the calculated solutions, the numerical calculation finally reduces to solving a Poisson equation. This is done using a standard code written by Schwarztrauber and Sweet (1980), which allows various boundary conditions. In most of the calculations presented

below, the stream function is defined on a regular array of 256^2 grid points with a uniform spacing in each direction.

We consider a “temporal” mixing layer, i.e. with periodic boundary conditions in the x -direction. The calculation is carried out in a square domain of size D_N (the physical significance of D_N will be specified later). On $y = \pm D_N/2$, we employ free-slip boundary conditions $\psi = 0$ and $\nabla^2 \psi = 0$.

The velocity distribution of the basic flow at $t = 0$ is a hyperbolic tangent velocity profile $u(y) = U \tanh 2y/\delta_i$; x , y and t are made non-dimensional with respect to the velocity U and the initial vorticity thickness δ_i . The vorticity thickness $\delta(t)$ at any time is defined by $\delta = 2U/(\overline{d\bar{u}/dy})_{max}$, the bar denoting an average in the x -direction. The initial “Reynolds number” based on these scales and characterizing the ratio of inertial to dissipative forces in (2-2) is $Re = U\delta_i^3/\nu_1$ and all the simulations are carried out with the value $Re = 10\,000$.

Superimposed upon the basic flow is a white-noise stream-function perturbation of small amplitude multiplied by $\exp(-y^2/\delta_i^2)$. This random perturbation injects energy into all the longitudinal spatial modes, and should reasonably approximate the case of a real mixing layer which is naturally submitted to a residual turbulence having a broad-band spectrum. In that sense, the following calculations are closer to a real mixing layer than the calculations with only deterministic perturbations.

It is known from linear stability analysis (Betchov and Szewczyk, 1963) that perturbations corresponding to unstable modes will develop, since perturbations at all wavenumbers are initially present. The structures corresponding to the most amplified wavenumber (i.e. with the highest amplification rate) will appear first,

corresponding to what we will call a “fundamental” mode. The associated most unstable wave length λ_a given by the theory is approximately $\lambda_a = 7\delta_i$ (the most amplified wavenumber $2\pi/\lambda_a$ being $0.8892 \delta_i^{-1}$, see Michalke, 1964). Thus the side of the computational domain has to be taken equal to $D_N = 7N\delta_i$ in order to obtain N Kelvin-Helmholtz vortices in the streamwise direction: this is what we will call an “ N -eddy calculation”. A further deterministic sine perturbation of wave length λ_a and of small amplitude (modulated by the same gaussian y -filter) is also superposed on the basic flow in order to fix the position (phase) of the Kelvin-Helmholtz eddies on the x -axis: without such a deterministic perturbation, the eddies would have, from one run to another, a randomly distributed position on this axis. In all the calculations which follow, U and the initial vorticity thickness δ_i will be the same, as well as the deterministic sine perturbation, and the statistics of the various white-noise perturbations considered. The amplitudes of the two initial stream-function perturbations (random and deterministic) relative to the stream function of the mean flow are 10^{-3} . The calculations will differ in the number of eddies involved (and so the size D_N of the domain), the particular realizations of the white noise, and the number of grid points. For example, Figure 1 shows a 4-eddy calculation (resolution 256^2) at the time $t = 15 \delta_i/U$ when the four eddies have appeared. The colours indicate the (algebraic) value of the vorticity from the minimum (blue) to the maximum (red). The vorticity of the basic inflexional velocity profile is negative; hence the blue colour will correspond to regions of high vorticity magnitude $2U/\delta_i$, and the red color to the outer irrotational flow. We recall that, from the basic equation (2-2), the initial vorticity field is convected by the motion and diffused

by viscosity: thus the values of the vorticity magnitude at any time cannot exceed $2U/\delta_i$ (this condition is not, however, exactly fulfilled in the calculation, due to the replacement of the viscous harmonic dissipation by a biharmonic dissipation).

We have checked that the vorticity thickness is of the order of $2\delta_i$ when the fundamental eddies have appeared. Note finally that since a subharmonic perturbation is also initially present in the white noise, the subharmonic instability analysed by Kelly (1967) will grow, resulting generally in a pairing between the fundamental vortices (Riley and Metcalfe, 1980); we have observed such pairing in most of our simulations.

With this temporal mixing layer we will later associate a spatial problem with two velocities U_1 and U_2 such that $U_1 - U_2 = 2U$; the distance downstream of the splitter plate will correspond to $\frac{1}{2} t (U_1 + U_2)$. This is justified only if the streamwise growth of the spatial layer over distances of the order of D_N is neglected. Nevertheless, the main results of the following calculations (temporal case) may prove to be applicable in the spatial case also. Figure 2 - *a* shows an artificial spatial mixing layer associated with a calculation involving initially 8 eddies and reconstructed with 15 vorticity fields, separated by a period of time of $5\delta_i/U$. Figure 2 - *b* shows 9 vorticity fields displayed from $t = 0$ to $t = 80\delta_i/U$ in the 4-eddy calculation: this clearly exhibits the appearance of the fundamental structures as well as the first and the second pairing.

2.2 - Two-dimensional dynamics of the coherent structures

A study of the mixing layer from the point of view of turbulence theories requires

the calculation of statistical quantities, such as spectra. Since the mixing layer considered here is periodic in the x direction only, the flow can be assumed statistically homogeneous only in this direction. Spatial Fourier transforms in the x direction may therefore be considered; analogous Fourier transforms in the y direction would be less significant physically since there is no periodicity in that direction. We consider then the one-dimensional longitudinal spectrum of the streamwise velocity component u

$$E_1(k_x) = \frac{1}{2d} \int_{-d}^{+d} |\hat{u}(k_x, y)|^2 dy, \quad (2-3)$$

where $\hat{u}(k_x, y)$ is the longitudinal Fourier transform of the streamwise component u at a given y

$$\hat{u}(k_x, y) = \frac{1}{D_N} \int_0^{D_N} u(x, y) \exp -ik_x x dx. \quad (2-4)$$

$2d \leq D_N$ corresponds to a y -span on which the longitudinal spectrum is averaged. The longitudinal wave number k_x will be restricted to positive values. One can also consider the longitudinal spectrum of the cross-stream velocity component v

$$E_2(k_x) = \frac{1}{2d} \int_{-d}^{+d} |\hat{v}(k_x, y)|^2 dy, \quad (2-5)$$

with

$$\hat{v}(k_x, y) = \frac{1}{D_N} \int_0^{D_N} v(x, y) \exp -ik_x x dx. \quad (2-6)$$

For simplicity, k_x will be hereafter denoted k . It must be stressed that if the two-dimensional turbulence were isotropic (which is obviously not the case for the mixing layer), the longitudinal energy spectrum $E_1(k_x)$ defined by (2-3) would be related to the isotropic energy spectrum $E(k)$ (integral of half the modal velocity variance

$\frac{1}{2}|\hat{\underline{u}}(\underline{k})|^2$ in Fourier space over a circular ring of radius $\approx k = |\underline{k}|$) by the relation (see e.g. Mory and Hopfinger, 1986, or Sommeria, 1986)

$$E_1(k) = \frac{2}{\pi} \int_k^{+\infty} \frac{(p^2 - k^2)^{1/2}}{p^2} E(p) dp . \quad (2-7)$$

Then an inertial-range isotropic energy spectrum $E(k) \sim k^{-\alpha}$ will correspond to a $k_x^{-\alpha}$ longitudinal spectrum $E_1(k_x)$.

We present now the time evolution of a 4-eddy calculation both in the physical and Fourier space: in Figure 3 are plotted simultaneously the isovorticity lines of the velocity field and the one-dimensional longitudinal spatial energy spectrum $E_1(k)$ (defined from (2-3) with $d = D_4/2$), for a calculation involving 183^2 grid points. The unit of time is δ_i/U . In Figure 3 - a the small peak at the fundamental wavenumber $k_4 = 2\pi/\lambda_a$ corresponds to the small sine perturbation superposed upon the white noise (flat spectrum). At time $t = 20$ these eddies have been completely formed, and give rise to a peak in the energy spectrum (Figure 3 - b). But nonlinear interactions between modes have already distributed the energy across a broad spectrum composed of two distinct parts: the harmonics of the fundamental mode k_4 emerge from the rest of the spectrum, where the pairing modes k_2 (first subharmonic $k_2 = k_4/2$) and k_1 (second subharmonic $k_1 = k_2/2$) begin to grow. At time $t = 40$, the first pairing is finished, and the two parts of the spectrum have collapsed into a k^{-4} range extending beyond k_2 (Figure 3 - c). At time $t = 80$, at the end of the second pairing, the second subharmonic $k_1 = \pi/2\lambda_a$ has grown and increases the length of the k^{-4} range to 1.5 decades (Figure 3 - d). In fact, the magnitude of the spectral exponent seems then to decrease slightly, perhaps towards a $-11/3$ value due to spiralling effects mentioned by Moffatt (1986).

We have also calculated in both cases the v -longitudinal energy spectra $E_2(k)$: they display the same behaviour as $E_1(k)$, that is, formation of a k^{-4} range after the first pairing. It is found that both u and v r.m.s. velocity fluctuations are of the same order in the calculation, which indicates that the turbulence at scales smaller than δ have some characteristics of two-dimensional isotropy. This is at variance with experimental mixing layers, where $v'^2 \approx w'^2 < u'^2$.

Figure 4 shows the time evolution of the kinetic energies of modes k_4 , k_2 and k_1 . The formation of the coherent structures of wave length λ_a and the first pairing are, respectively, associated with the maxima of $E_1(k_4)$ and $E_1(k_2)$ (at $t = 15$ and 35 respectively). The first maximum of $E_1(k_1)$ at $t = 50$ does not, as can be checked by the visualization of the vorticity fields in Figure 2 - *b*, correspond to the end of the second pairing, which actually occurs later, at about $t = 75$. This is due, as will be seen below, to an effect of the boundaries. The computing time (with this resolution of 183^2 grid points) for the emergence of the coherent structures and the two successive pairings is about 15 minutes on a CRAY 1 machine.

It is tempting to associate with the continuous spectrum we have found the words "inertial-range", used for isotropic two-dimensional turbulence. Furthermore the mechanism of the shearing of small scale fluid elements by larger scale velocity gradients, proposed to justify the enstrophy cascade concept (Kraichnan 1967, Leith 1968, Batchelor, 1969), is certainly acting during the mixing-layer evolution. But the difference of our spectral exponent with the -3 value found in the classical enstrophy cascade statistical analysis is still an open question. A further analogy of the mixing layer with isotropic two-dimensional turbulence may be found in the

large, spatially organized “coherent structures” of the former, which resemble the coherent structures found by McWilliams (1984) in the isotropic case.

The fact that the two-dimensional mixing layer possesses a broad spatial spectrum and is, as will be seen in the next section, extremely sensitive to initial conditions and unpredictable, justifies considering it as a special case of two-dimensional turbulence (even though it is not isotropic). One might argue that in reality the spectra measured experimentally follow a $k^{-5/3}$ law at scales smaller than the vorticity thickness (Perry et al. 1982, Browand and Ho, 1983), and not the laws intermediate between k^{-4} and k^{-3} found in our simulations. This is due to the existence of small scale three-dimensional turbulence whose Kolmogorov spectrum contaminates the “coherent structures spectrum” up to the large scales. However, it is likely that the large structures of the real three-dimensional mixing layer will retain in their memory the two-dimensional turbulent character exhibited in our numerical simulations. Thus, instead of denying the coherent structures the right of being called turbulent, we will rather say that the turbulent mixing layer is both composed of two-dimensional (the coherent structures) and three-dimensional turbulence. The way these two classes of turbulence might interact will be examined in Sections 3 and 4.

2.3 - Growth rate of the layer

Figure 5 shows the evolution with time of the mean vorticity thickness $\delta(t)$, averaged over two realizations of the flow differing only in the initial white noise perturbation. The calculations are all done with 256^2 grid points, and involve 4 eddies, 8 eddies and

16 eddies (see Figures 5a, b, c respectively). The size of the computational square is $D = D_4$, $2D = D_8$ and $4D = D_{16}$ in the cases a, b, c respectively, with the same δ_i and deterministic perturbation in the three cases. Though the spatial resolution (number of grid points per fundamental eddy) decreases by a factor of 2 from a) to b) and from b) to c), the corresponding calculations and visualizations (cf Figures 2, 5 - b and 5 - c) tend to indicate that the loss of resolution does not change the essential dynamics of the layer. The advantage of these 8- and 16-eddy calculations compared with the 4-eddy case is, as will be seen, the possibility of further pairings without the constraining influence of the boundaries: on Figure 5 - a are indicated the appearance of the fundamental eddies at $t = 15 \delta_i/U$, the first pairing at $t = 35 \delta_i/U$ and the second pairing at $t = 75 \delta_i/U$. The figure also indicates clearly an inhibition of the layer spreading at about $t_B = 50 \delta_i/U$, before the end of the second pairing. At times greater than 150, the smoothing observed on the curve corresponds to a single eddy having approximately a circular shape. On Figure 5 - b, where the domain width is twice as large, $t_B = 90 \delta_i/U$ is subsequent to the second pairing. In Figure 5 - c, the influence of the boundaries starts at $t_B \approx 190 \delta_i/U$, later than the third pairing. Figure 5 - d, where the three calculations are superposed, summarizes these results and clearly indicates this boundary effect in the various calculations, and thus their limit of validity (with respect to the free mixing layer in an infinite domain). It also shows that the mean slope of the linear growth in this temporal calculation is of the order of 0.10, smaller than the value of 0.17 found in various spatial mixing layer experiments for the spreading constant $[(U_1 + U_2)/(U_1 - U_2)]d\delta/dx$ (see for example Liepman

and Laufer 1947 or Bernal 1981). It is not clear whether this difference is ascribable to the subgridscale biharmonic dissipation or to the temporal approximation itself. Notice however that the numerical averaged linear tendency of 0.10 is obtained from calculations involving up to three successive pairings, and that some of our calculations show a quicker growth of the vorticity thickness up to the first pairing.

From the average tendency displayed above, a layer of thickness δ doubles its thickness in a time $\approx 10 \delta/U$. Hence, it is possible to determine systematically the times at which the various pairings occur more precisely than with visual observations: if the fundamental eddies form at $t_1 = 15 \delta_i/U$ (when the vorticity thickness is $2 \delta_i$), the first pairing will occur at about

$$t_2 = t_1 + 10(2\delta_i/U) = 35 \delta_i/U,$$

the second pairing at

$$t_3 = t_2 + 10(4\delta_i/U) = 75 \delta_i/U,$$

and the third pairing at

$$t_4 = t_3 + 10(8\delta_i/U) = 155 \delta_i/U.$$

For the associated spatial mixing layer, this would correspond to non-dimensional downstream distances $[(U_1 - U_2)/(U_1 + U_2)](x/\delta_i)$ of 35, 75 and 155 for the first, second and third pairing, respectively. With the experimental spreading rate of 0.17, and taking the same time $t_1 = 15 \delta_i/U$ for the formation of the fundamental eddies, one would obtain instead distances of 27, 50 and 97 for the three successive pairings. In the experiments of Ho and Huang (1982), the times of 28 and 56 are

found for the first and the second pairing. Note that in Figure 5 – c the strong decrease of the vorticity thickness at the end of the third pairing simply indicates a rotation of the eddies about each other. Note also that the times when the influence of the boundaries becomes noticeable correspond approximately to the end of the first pairing in the 4-eddy calculation and to the end of the second pairing in the 8-eddy calculation, when in both cases there remain two eddies in the computation domain. It is somewhat surprising that these two eddies can merge completely (as can be checked using the visualizations from the three cases a, b and c), without any further increase of the vorticity thickness (which increased regularly during the earlier pairings). We believed initially that this earlier saturation was due to the influence of the parallel boundaries $y \doteq \pm D$. We then performed 8-eddy calculations in a rectangular domain of size $2D \times 4D$ (resolution 256×512), which do not show a significant increase in the vorticity thickness amplitude, nor in the saturation time, compared with the corresponding calculation in the square domain. The saturation observed is therefore due to the periodicity in the x -direction, corresponding to the temporal approximation. Notice, however, that an 8-eddy calculation in a rectangular domain of size $2D \times D$ shows an influence of the parallel boundaries which slow down the growth of the vorticity thickness.

3 - THE TENDENCY TOWARDS THREE-DIMENSIONALITY

Here we will try to study some aspects of the three-dimensionalization of the mixing layer by looking at some particular three-dimensional spanwise instabilities developing on Kelvin-Helmholtz billows: such instabilities have been, for instance, studied

experimentally by Bernal (1981) and Jimenez et al.(1985), and theoretically by Pierrehumbert and Widnall (1982) on the basis of a linear stability analysis performed on Stuart vortices. Corcos and Lin (1984) generalized the latter study to an arbitrary time evolving basic flow. Here we will give a statistical version of a particular three-dimensionalization process, based on the equivalence between a two-mode spanwise truncation of the three-dimensional Navier-Stokes equation and two-dimensional predictability theory. Consider the following flow, where the velocity and pressure fields $\underline{u}(\underline{x}, t)$ and $p(\underline{x}, t)$ are expanded as

$$\underline{u}(x, y, z, t) = \underline{u}_{2D}(x, y, t) + \sqrt{2} \underline{u}_{3D}(x, y, t) \sin k_z z , \quad (3 - 1)$$

$$p(x, y, z, t) = p_{2D}(x, y, t) + \sqrt{2} p_{3D}(x, y, t) \sin k_z z , \quad (3 - 2)$$

where \underline{u}_{2D} and \underline{u}_{3D} are parallel to the x - y plane and non-divergent. These two fields represent, respectively, the basic two-dimensional flow (first mode of the expansion) and the amplitude of the three-dimensional perturbation (second mode of the expansion); k_z is a constant. Such a velocity field is non divergent, since its z component is zero. This decomposition parallels the analysis leading to the “barotropic” and “baroclinic” spectral two-mode decomposition of the quasi-geostrophic equation for rapidly rotating fluids (see e.g. Hoyer and Sadourny 1982), the latter being the equivalent of the quasi-geostrophic two-layer model (see e.g. Pedlosky, 1979, for details). The essence of the two-mode truncation of the three-dimensional Navier-Stokes equation is to assume that the form (3-1)-(3-2) is conserved with time, and to discard the fluctuations in the spanwise mode $2k_z$ which are produced by non linear interactions. Consider the three-dimensional Navier-Stokes equation (with constant

density)

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{u} \cdot \nabla \underline{u} = -\nabla p + \nu \nabla^2 \underline{u}, \quad (3-3)$$

in which we substitute the particular expansions (3-1) and (3-2). One obtains

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \underline{u}_{2D}}{\partial t} + \underline{u}_{2D} \cdot \nabla \underline{u}_{2D} + 2 \sin^2 k_z z \underline{u}_{3D} \cdot \nabla \underline{u}_{3D} \\ & + \sqrt{2} \sin k_z z \left(\frac{\partial \underline{u}_{3D}}{\partial t} + \underline{u}_{2D} \cdot \nabla \underline{u}_{3D} + \underline{u}_{3D} \cdot \nabla \underline{u}_{2D} \right) \\ & = -\nabla p_{2D} - \sqrt{2} \sin k_z z \nabla p_{3D} + \nu [\nabla^2 \underline{u}_{2D} + \sqrt{2} \sin k_z z (\nabla^2 \underline{u}_{3D} - k_z^2 \underline{u}_{3D})]. \end{aligned} \quad (3-4)$$

Noticing that $2 \sin^2 k_z z = 1 - \cos 2k_z z$, eliminating the $\cos 2k_z z$ term (which corresponds to the truncation), we obtain after identification of the $\sin k_z z$ terms

$$\frac{\partial \underline{u}_{2D}}{\partial t} + \underline{u}_{2D} \cdot \nabla \underline{u}_{2D} + \underline{u}_{3D} \cdot \nabla \underline{u}_{3D} = -\nabla p_{2D} + \nu \nabla^2 \underline{u}_{2D} \quad (3-5)$$

$$\frac{\partial \underline{u}_{3D}}{\partial t} + \underline{u}_{2D} \cdot \nabla \underline{u}_{3D} + \underline{u}_{3D} \cdot \nabla \underline{u}_{2D} = -\nabla p_{3D} + \nu \nabla^2 \underline{u}_{3D} \quad (3-6)$$

[in (3-6), the $\sim \nu k_z^2 \underline{u}_{3D}$ term (arising in (3-4)) has been neglected in the dissipation term; we think this term would have only a negligible influence on the following results].

These equations present similarities with one of the cases (the “coupled case”) studied by Corcos and Lin (1984, see their equations 2.2b and 2.3), but in our model the ∇ operator is two-dimensional. Now let

$$\underline{u}_1(x, y, t) = \underline{u}_{2D} + \underline{u}_{3D}, \quad \underline{u}_2(x, y, t) = \underline{u}_{2D} - \underline{u}_{3D} \quad (3-7)$$

and similarly for p_1 and p_2 . It is easy to show from (3-5) and (3-6) that \underline{u}_1 and \underline{u}_2 both satisfy independent two-dimensional Navier-Stokes equations, with the same boundary conditions as $\underline{u}(x, y, z, t)$ for $y = \pm\infty$. Thus the study of

$\frac{1}{2}(\underline{u}_1 + \underline{u}_2) = \underline{u}_{2D}$ will give immediate access to the evolution of the “base flow” (following Corcos and Lin’s 1984 terminology), and $\frac{1}{2}(\underline{u}_1 - \underline{u}_2) = \underline{u}_{3D}$ will be the three-dimensional perturbation amplitude. A schematic three-dimensional representation of the vorticity field is given in Figure 6, which is similar to Corcos and Lin’s (1984) Figure 13 and Pierrehumbert and Widnall’s (1982) Figure 9.

Such an analysis is of course subject to criticism, since there is no lateral velocity in the velocity field. The discarding of the $\cos 2k_z z$ term eliminates certainly some important three-dimensional characteristics of the flow, such as the existence of secondary streamwise vortices (Bernal, 1981) or of small-scale three-dimensional turbulence. However, the same assumption done for the quasi-geostrophic potential vorticity equation yields valuable results regarding the baroclinic instability, which is nothing more than the growth of three-dimensionality in a quasi two-dimensional eddy (of vertical axis) of the type presented in Figure 6.

In the mixing-layer case, the above derivation shows that, for the particular three-dimensional perturbation defined by (3-1)-(3-2), the three-dimensionality study corresponds exactly to a two-dimensional predictability problem. This gives a mathematical justification to and specifies the limits of validity of an analogy already proposed by Lesieur (1983) and Staquet et al. (1985), and discussed from the point of view of the statistical theory of turbulence by Métais and Lesieur (1986).

We consider then two velocity fields $\underline{u}_1(x, y, t)$ and $\underline{u}_2(x, y, t)$ which evolve independently (in the same square domain D_N and with the same boundary conditions as in Section 2) according to the two-dimensional Navier-Stokes equation, with dif-

ferent initial conditions. Let

$$\begin{aligned} E_{3D} &= \langle u_{3D}^2 \rangle = \frac{1}{4} \langle [u_1(x, y, t) - u_2(x, y, t)]^2 \rangle \\ &= \frac{1}{8dD_N} \int_{-d}^{+d} dy \int_0^{D_N} [u_1(x, y, t) - u_2(x, y, t)]^2 dx \end{aligned} \quad (3-8)$$

(where $u_1 - u_2$ is the longitudinal component of the velocity difference $\underline{u}_1 - \underline{u}_2$) be a spatial average of the longitudinal “velocity difference energy” in a rectangular domain $x \in [0, D_N]$, $y \in [-d, +d]$, with $2d = D = D_4$. E_{3D} characterizes also the mean kinetic energy of the three-dimensional perturbation (averaged over a wavelength $2\pi/k_z$ in the spanwise direction). Let also

$$E_{2D} = \frac{1}{2} \langle u_1^2 \rangle = \frac{1}{4dD_N} \int_{-d}^{+d} dy \int_0^{D_N} u_1^2(x, y, t) dx \quad (3-9)$$

(where u_1 is the longitudinal component of \underline{u}_1) characterize a mean two-dimensional kinetic energy. Such a choice allows the ratio

$$r(t) = \frac{E_{3D}}{E_{2D}} \quad (3-10)$$

to be zero if $\underline{u}_1 \equiv \underline{u}_2$, and equal to 1 if \underline{u}_1 and \underline{u}_2 are completely spatially decorrelated (which means complete three-dimensionalization). We define also the longitudinal error spectrum as

$$E_\Delta(k_x, t) = \frac{1}{2d} \int_{-d}^{+d} |\hat{u}_1(k_x, y, t) - \hat{u}_2(k_x, y, t)|^2 dy \quad (3-11)$$

with

$$\hat{u}_1(k_x, y, t) - \hat{u}_2(k_x, y, t) = \frac{1}{D_N} \int_0^{D_N} [u_1(x, y, t) - u_2(x, y, t)] \exp(-ik_x x) dx \quad (3-12)$$

In the case of isotropic two-dimensional turbulence, The Eddy-Damped Quasi-Normal Markovian theory (EDQNM) (or nearly equivalent Test-Field-Model) was

applied to this statistical predictability problem by Leith and Kraichnan (1972) in the case of a stationary enstrophy cascade: they found that, for an error initially confined to large wavenumbers (but not in the dissipation range), the error rate $r(t)$ (characterizing here the ratio of the error energy to the kinetic energy) increases exponentially. The same study was carried out by Métais et al. (1983) and Métais and Lesieur (1986), both in the forced and decaying case. They showed that the initial large k error was very rapidly transferred to the energy-containing eddies of wave-number k_i , due to non-local interactions in Fourier space. In the problem where the error is initially injected in the “energetic” wave-numbers $k_i(t_0)$, the results suggested that

$$r(t) \sim e^{(t-t_0)/\sigma \tau_0} \quad (3 - 13)$$

where τ_0 is the initial large eddy turnover time when the error is injected into the system. σ is equal to 2.6 in the forced case and to 3.8 in the unforced case.

This result of exponential error growth is based on statistical closures of two-dimensional turbulence whose validity has often been questioned. Furthermore, and even if it were valid, its relevance for the mixing layer (which is neither isotropic nor even homogeneous) is subject to caution. It is therefore useful to recover the same kind of result (i.e. growth of decorrelation between two initially close realizations \underline{u}_1 and \underline{u}_2 of the flow) on the basis of the present numerical large eddy simulation. Such a study was initiated by Staquet (1985) by perturbing with white noise a 4-eddy mixing layer once the fundamental eddies had been formed, and looking at the difference between the unperturbed and perturbed flow: in such a calculation the error rate, after a strong initial decrease, rose exponentially up to a value of about

0.05, then saturated for times greater than about 50 (which is precisely the time where the 4-eddy layer stops growing, due to the boundary-effect). Figure 7 shows the time evolution of the one-dimensional longitudinal error spectrum corresponding to Staquet's 1985 calculation. An inverse cascade of error through the energy spectrum, similar to that predicted by Leith and Kraichnan (1972) or Métais and Lesieur (1986) is observed on this Figure.

Here, we have chosen to make the two fields $\underline{u}_1(x, y, t)$ and $\underline{u}_2(x, y, t)$ differ only in the initial (at $t = 0$) white noise, while having the same sine perturbation at the most amplified mode, as in the calculations presented in Figure 5: they will then develop the fundamental structures at the same x -location, and will thus (at $t = 15 \delta_i/U$) differ by an error (due to the initial difference in the white noise) which will have had time to adjust to the equations. One can then study the evolution of the three-dimensionality ($\underline{u}_1 - \underline{u}_2$) on the basis of a physically acceptable velocity field. As an example, Figure 8 compares the two realizations of the mixing layer in the calculation of Figure 5 – *b* at $t = 80$: significant differences are visible! The velocity field 2 in Figure 8 displays an “anomalous pairing”, where one eddy which was about to pair with its neighbour has suddenly changed its partner and will finally pair with the third eddy, as we have checked on the following sequences.

We have then evaluated the error rate (that is the relative three-dimensionality) in the three cases studied in Figure 5, calculating the error between the two fields for a square domain of side $D_4 = D$, $D_8 = 2D$, and $D_{16} = 4D$. For each case the error rate is calculated using (3-8), (3-9) and (3-10). This allows significant comparisons between the three cases studied: indeed, the initial deterministic conditions in the

cases D_8 and D_{16} are obtained from those for D_4 by a translation of period D in the x -direction; as to the initial white noise perturbation, its statistics in the streamwise direction are independent of D_N in (3-8) and (3-9). Thus, the initial value $r(0)$ is the same for the three cases, as found in the calculations.

The error rate $r(t)$, given by (3-10), is characteristic of the three-dimensionality of the layer, since E_{2D} given by (3-9) remains very close to its initial value $O(U^2)$ given by the hyperbolic tangent velocity profile of the basic flow. $r(t)$ is presented on Figures 9 and 10. Figure 9 clearly shows that the saturation of the three-dimensionality occurs at the same time t_B where the vorticity thickness stops growing, and is thus an effect of the finiteness of the domain and of the longitudinal periodicity: for instance the maximum value of the error rate rises from 0.1 to 0.35 when the size of the domain goes from D (4-eddies) to $4D$ (16-eddies). A calculation carried out in an infinite domain would presumably yield a further growth of $r(t)$ up to the maximum value of 1. The fluctuations observed in r are due both to the global rotation of the large structures, and also to the fact that only the error between two realizations is calculated here, though the statistical predictability theory strictly requires an average over an ensemble of pairs of realizations: such an averaging would have been too costly, since the calculation of a single flow realization up to $t = 200 \delta_i/U$ with 256^2 grid points already required 2.40 hours on the Grenoble University FPS 264 computer (and 7.40 hours for 256×512 points). In Figure 10 the same error rate is shown in semi-log coordinates for the three runs, and displays two distinct types of exponential behaviour: up to $t = 25 \delta_i/U$, the

error rate varies as

$$r(t) = r(0) \exp \frac{Ut}{3 \delta_i} . \quad (3 - 14)$$

This rapid increase corresponds to the formation of the fundamental eddies and the beginning of the first pairing, but leads to small values (0.05), because of the infinitesimal initial errors in our calculation. Then, after the first pairing (for $t > t_0 = 40 \delta_i/U$), a second exponential phase follows, approximately described as

$$r(t) = r(t_0) \exp \frac{U(t - t_0)}{15 \delta(t_0)} \quad (3 - 15)$$

Extrapolation of this law for an infinite domain would yield $r(t) = 1$ at $t = 240 \delta_i/U$. Interpreted in terms of three-dimensionality, these results suggest that the three-dimensional instability keeps on growing indefinitely in an infinite domain, even in the presence of subharmonic perturbations (causing the pairings and the spreading of the layer) which are present (because of the initial white noise) in our calculations. There is of course, as shown in Figure 10, a drastic change in the evolution of the three-dimensionality which occurs during the first pairing, but the three-dimensionality keeps on increasing thereafter, until it saturates due to the x -periodicity: practically, one can say that the three-dimensionality grows as far as the layer thickness (measured by the vorticity thickness or the momentum thickness) increases.

This interpretation is at variance with the conclusions drawn by Corcos and Lin (1984) from two-dimensional calculations, and by Metcalfe et al. (1986) with the aid of three-dimensional calculations: indeed these calculations show a saturation in the growth of the three-dimensional kinetic energy, associated with the existence of

a subharmonic pairing mode. But these calculations consider deterministic initial perturbations, and might not involve domains and times large enough to eliminate the possibility of a further growth of three-dimensionality, after a slowing down during the first pairing.

We suggest from our results that in an infinite domain (for a temporal layer), or in a spatial layer (where there is no periodicity constraint in the spatial direction), the initially quasi-two-dimensional layer would return exponentially to three-dimensionality. An estimate of the characteristic time of three-dimensionalization for a mixing layer of vorticity thickness $\delta(t_0)$, with Kelvin-Helmholtz billows formed and perturbed at $t = t_0$ by a three-dimensional perturbation of relative kinetic energy $r(t_0)$, is given by (3-15) with $r(t) = 1$. This yields

$$T_{3D} = 15 \frac{\delta(t_0)}{U} \ln r(t_0)^{-1} \quad (3-16)$$

Here, three-dimensionality does not mean a-priori loss of spanwise coherence : but it is conceivable that once a Kelvin-Helmholtz billow has developed strong spanwise distortions, it may break down into developed three-dimensional turbulence with a $k^{-5/3}$ kinetic energy spectrum. It has to be stressed that our particular two-mode analysis has no preferred spanwise wave-length since all the spanwise perturbations have the same amplification rate, regardless of k_z . It is therefore the shortest spanwise wave-lengths which will correspond to the maximum amount of three-dimensionality, measured by the distortion slope $\sim u_{3D} k_z$ of the distorted vortex tube of Figure 6. But since the two-mode truncation (3-1)-(3-2) has certainly no physical reality for spanwise wave-lengths $< \delta_0$, the latter scale appears – within the present analysis – as the most amplified spanwise wave-length. Let

us stress finally that the streamwise secondary vortices found experimentally, and which have been also observed in the three-dimensional numerical simulations of Metcalfe et al. (1986), might develop as a consequence of the spanwise oscillation of the Kelvin-Helmholtz billow described above.

Experimentally, the three-dimensionalization of the layer is particularly spectacular in the initial stage of the evolution downstream of the splitter plate: the non dimensional “transition” distance D_{tr} found is (Jimenez et al. 1979)

$$\frac{U_1 - U_2}{U_1 + U_2} \frac{D_{tr}}{\delta_i} \approx 60 . \quad (3 - 17)$$

With the initial value $r(0) = 1.7 \cdot 10^{-5}$ taken in our calculations, the three-dimensionalization distance is of the order of 240, as already stressed. But it is clear on Figure 10 that an initial value $r(0) = 1.2 \cdot 10^{-4}$ would yield $r(t) = 1$ at $t = 80$, closer to the value (3-17). It is thus difficult to predict theoretically the transition distance, in the absence of experimental data concerning the amplitude of the three-dimensional turbulence immediately downstream of the splitter plate. It might be that the abrupt transition between (3-14) and (3-15) corresponds to the catastrophic occurrence of three-dimensionalization found experimentally in the initial stage. As for the law (3-16), it will apply in the “developed region”, downstream of D_{tr} .

4 - TRANSITION COHERENCE/INCOHERENCE

It is the developed region which will be considered here: several experiments (see e.g. Browand and Troutt 1980) have confirmed that the large coherent structures are still present far downstream, hidden behind the agitation of small scale three-dimensional

turbulence. We then assume that one of these large structures is perturbed by a spanwise oscillation with $k_z \sim 2\pi/\delta_0$, and that, from the results of the last section, it will break down into small-scale three-dimensional turbulence: we now have a three-dimensional turbulent layer superposed upon a mean inflexional shear of vorticity thickness δ . For instance, as already mentioned, the longitudinal spectra determined by Browand and Ho (1983) in the central region of a high Reynolds number mixing layer show a nice $k^{-5/3}$ Kolmogorov cascade beyond the wave number δ^{-1} characteristic of the large scales, indicating that the mixing layer could be a superposition of coherent structures and of three-dimensional turbulence not far from isotropy. We assume then that the action of three-dimensional turbulence on the large coherent scales which are about to form can be modelled with the aid of an eddy viscosity ν_t , and that during the stage corresponding to the presence of small scale turbulence superposed on the large scale inflexional shear, one can write the equation

$$[\partial/\partial t + J(., \psi)]\nabla^2\psi = \nu_t\nabla^2(\nabla^2\psi) \quad (4-1)$$

where $\psi(x, y, t)$ is a stream function representing the two-dimensional large scales (mean shear + a two-dimensional broad band spectrum perturbation $\tilde{\psi}(x, y, t)$). The value of ν_t can be evaluated either by measuring experimentally the Reynolds stresses (Wynanski and Fiedler 1970), or by recourse to the concept of eddy-viscosity in spectral space introduced by Kraichnan(1976) and used for large-eddy simulation purposes by Chollet and Lesieur (1981) (see Lesieur, 1987, for a review). In the latter case, and when working in the Fourier space, this eddy-viscosity can be expressed in terms of the kinetic energy spectrum at the cutoff wave number k_C ,

and written

$$\nu_t = 0.28 \left[\frac{E(k_C)}{k_C} \right]^{1/2} . \quad (4-2)$$

For the mixing layer, we decide quite arbitrarily to consider that the large scales extend up to $k_C = 2\delta^{-1}$, and still assume that the action of modes $k > k_C$ upon the large scales correspond to the eddy-viscosity (4-2) determined with the aid of energy spectra measured in the experiments (Lesieur 1983). This yields

$$\frac{\delta U}{\nu_t} = 30 \sim 40 \quad (4-3)$$

for the “turbulent Reynolds number”. Then the perturbation $\tilde{\psi}$, which can initially be provided by the three-dimensional turbulence itself, will satisfy the Orr-Sommerfeld equation (but with the eddy-viscosity replacing the molecular viscosity) and the most amplified coherent structure $\lambda_a = 7 \delta$ will appear in a characteristic time $\approx 10 \sim 15 \delta/U$: the coherent structure will then emerge from the smaller scale turbulence. A similar behaviour has been observed experimentally (Browand and Ho, 1983) when a mixing layer is forced across a grid in a wind tunnel. The role of the mean flow instability in the formation of the coherent structures had previously been pointed out by Taneda (1981).

Hence we suggest that the evolution of the mixing layer in the developed region and in an infinite domain is characterized by a cyclic exchange of energy between two and three-dimensional turbulence: starting from a two-dimensional “coherent structure” of vorticity thickness δ_0 , spanwise decorrelation develops exponentially until it breaks down into three-dimensional turbulence and the coherence is lost. The characteristic time for such a destruction is still given by (3-16), but $r(t_0)$ is not

very small anymore, since the three-dimensional perturbation corresponds now to developed three-dimensional turbulence. Thus the characteristic time of destruction will be of the order of $15 \delta(t_0)/U$. Then the ambient mean inflexional shear acts (through linear instability mechanisms) to build a new coherent structure. This is certainly an oversimplified view, compared to the complexity of various instabilities contributing to the three-dimensionalization or the coherence of the mixing layer. But it may nevertheless shed some light on the persistence far downstream of two-dimensional coherent structures. Let us remark finally that both mechanisms could occur simultaneously, as noted by Riley (1987, private communication).

5 - CONCLUSION

This paper has studied the large coherent structures of the temporal mixing layer from a two-dimensional point of view: large eddy numerical simulations have shown that these structures are turbulent in the sense that they are extremely sensitive to initial conditions ("unpredictable") and that they develop after the first pairing a broad band energy spectrum of slope intermediate between k^{-4} and k^{-3} . The mixing layer vorticity thickness growth is interrupted when the last two eddies merge, due to the periodicity in the x -direction.

It has also been shown that a two-mode spanwise spectral expansion is equivalent to the predictability formalism of growth of decorrelation between two independent two-dimensional fields.

Thus, the exponential loss of predictability in a two-dimensional turbulent flow, based both on isotropic EDQNM closures and large eddy numerical simulations

of the mixing layer, has been used to infer in the mixing layer an exponential growth of particular spanwise perturbations which will eventually lead to the three-dimensionalization of the structure. Our calculations carried out in domains of increasing size show that a saturation of the three-dimensional instability accompanies the interruption of the layer growth. We suggest that in a really free flow in an infinite domain, there would be no saturation of the three-dimensional spanwise instability growth, even with subharmonic modes initially present.

We have also proposed that, if the layer returns to three-dimensionality, a new coherent structure will then form, due to the instability of the mean inflexional shear, upon which the three-dimensional turbulence would simply act as an eddy-viscosity. Since the times for the destruction of the coherent structure depend logarithmically upon the amplitude of the initial perturbations, the exchange between "coherence" (two-dimensional turbulence) and three-dimensional turbulence will be intermittent when the perturbations are randomly distributed in space.

A new image of the turbulent mixing layer can be proposed from these results: the mixing layer is a superposition of two-dimensional turbulence (the coherent structures, of spectrum intermediate between k^{-3} and k^{-4}), and three-dimensional turbulence close to isotropy and following approximately the Kolmogorov $k^{-5/3}$ law. These two states under which turbulence is condensed interact in two ways: firstly the exponential spanwise distortion of the Kelvin-Helmholtz billows cascades into small scale three-dimensional turbulence. Secondly the linear instability of the mean inflexional shear, on which the three-dimensional turbulence serves both as an eddy-viscosity and a perturbation, recreates two-dimensional Kelvin-Helmholtz

billows.

A last point concerns the application of these concepts to other flows: some of the conclusions relating to three-dimensional instability growth may be applicable to large Reynolds number flows where large “coherent” quasi-two-dimensional structures tend to be created by some instability mechanism, and compete with the development of three-dimensional turbulence, e.g. for wakes or jets, thermal convective flows at high Rayleigh numbers, and rotating flows such as Couette-Taylor flow or turbulence in a rotating tank (Hopfinger et al. 1983). In the last case, the analysis carried out in Section 3 for an eddy with axis parallel to the axis of solid body rotation $\underline{\Omega}$ in fact yields the same set of equations as (3-5) and (3-6), with Coriolis force contributions $(-2\underline{\Omega} \times \underline{u}_{2D}$ and $-2\underline{\Omega} \times \underline{u}_{3D}$ respectively) which are irrotational (provided $\underline{\Omega}$ is a constant) and can therefore be included in the pressure terms. The same ideas of continuous destruction and recreation of the large organized structures may hold also for three-dimensional coherent structures, such as the “hairpin” or “horseshoe” vortices found in turbulent boundary layers (Kline et al. 1967, Taneda 1981, Head and Bandyopadhyay 1981, Moin and Kim, 1982, Perry and Chong, 1982); indeed they could result from the development of a sort of spanwise instability developing on two-dimensional eddies of a Tollmien-Schlichting type.

Acknowledgements: the help of S. Maslowe, J. Riley and K. Moffatt is greatly acknowledged, both for correcting the presentation of the final version and for numerous questions and remarks which allowed us to make our analysis more precise. This

work has also benefited from discussions with F.K. Browand, G. Corcos, P. Huerre, R.W. Metcalfe and J. Sommeria. It was supported by the DRET (contracts 83/314, 84/1413 and 85/220) and by the CNRS (ATP "Application des mathématiques et méthodes numériques performantes" and "Dynamique des fluides géophysiques et astrophysiques"). J. Verron kindly provided the basis of the numerical code. Part of the calculation facilities were granted by the Scientific Council of the Centre de Calcul Vectoriel pour la Recherche.

REFERENCES

- ARAKAWA, A., 1966, "Computational design for long-term numerical integration of the equations of fluid motion: two-dimensional incompressible flow", *J. Comp. Phys.*, **1**, pp 119-143.
- AREF, H. and SIGGIA, E.D., 1980, "Vortex dynamics of the two-dimensional turbulent shear layer", *J. Fluid Mech.*, **100**, pp 705-737.
- BASDEVANT, C. and SADOURNY, R., 1983, "Modeling of virtual scales in numerical simulation of two-dimensional turbulent flows", *J. Mec. Theor. Appl.*, Special Issue, "Two-dimensional turbulence", R. MOREAU ed., pp 243-269.
- BATCHELOR, G.K., 1969, "Computation of the energy spectrum in homogeneous two-dimensional turbulence", *Phys. Fluids Suppl.*, **II**, **12**, pp 233-239.
- BERNAL, L.P., 1981, "The coherent structure of turbulent mixing layers" Ph.D. Thesis. Calif. Inst. Technol. Pasadena.
- BETCHOV, R. and SZEWCZYK, G., 1963, "Stability of a shear layer between

parallel streams", *Phys. Fluids*, **6**, pp 1391-1396.

BROWAND, F.K. and HO, C.M., 1983, "The mixing-layer : an example of quasi two-dimensional turbulence", *J. Mec. Theor. Appl.*, Special Issue, "Two-dimensional turbulence", R. MOREAU ed., pp 99-120.

BROWAND, F.K. and TROUTT, T.R., 1980, "A note on spanwise structure in the two-dimensional mixing layer", *J. Fluid Mech.*, **93**, pp 325-336.

BROWN, G.L. and ROSHKO, A., 1974, "On density effects and large structure in turbulent mixing layers" *J. Fluid Mech.* **64**, pp 775-816.

CAIN, A.B., REYNOLDS, W.C. and FERZIGER, J.H., 1981, "A three-dimensional simulation of transition and early turbulence in a time-developing mixing layer", Report No. TF-14, Stanford, California.

CHOLLET, J.P. and LESIEUR, M., 1981, "Parameterization of small scales of three-dimensional isotropic turbulence utilizing spectral closures", *J. Atmos. Sci.*, **38**, pp 2747-2757.

CORCOS, G.M. and SHERMAN, F.S., 1984, "The mixing layer: deterministic models of a turbulent flow. Part 1: introduction and the two-dimensional flow", *J. Fluid Mech.*, **139**, pp 29-65.

CORCOS, G.M. and LIN, S.J., 1984, "The mixing layer: deterministic models of a turbulent flow. Part 2: the origin of the three-dimensional motion", *J. Fluid Mech.*, **139**, pp 67-95.

COUËT, B. and LEONARD, A., 1980, "Mixing layer simulation by an improved three-dimensional vortex-in-cell algorithm", in *Proc. 7th Intl. Conf. on "Numerical Methods in Fluid Dynamics"*, Stanford-Ames.

- HEAD, M.R. and BANDYOPADHYAY, P., 1981, "New aspects of turbulent boundary layer structure", *J. Fluid Mech.*, **107**, pp 297-337.
- HO, C.M. and HUANG, L.S., 1982, "Subharmonic and vortex merging in mixing layers", *J. Fluid Mech.*, **119**, pp 443-473.
- HO, C.M. and HUERRE, P., 1984, "Perturbed free shear layers", *Ann. Rev. Fluid Mech.*, pp 365-424.
- HOLLAND, W.R., 1978, "The role of mesoscale eddies in the general circulation of the ocean", *J. Phys. Ocean.*, **8**, pp 363-392.
- HOPFINGER, E.J., BROWAND, F.K. and GAGNE, Y., 1982, "Turbulence and waves in a rotating tank", *J. Fluid Mech.*, **125**, pp. 505- 534.
- HOYER, J.M. and SADOURNY, R., 1982, "Closure modeling of fully developed baroclinic instability", *J. Atmos. Sci.*, **39**, pp 707-721.
- JIMENEZ, J., MARTINEZ-VAL, R. and REBOLLO, M., 1979, "On the origin and evolution of three-dimensional effects in the mixing layer", Report of European Research Office, DA-ERO-78-G079.
- JIMENEZ, J., COGOLLOS, M. and BERNAL, L.P., 1985, "A perspective view of the plane mixing layer", *J. Fluid Mech.*, **152**, pp 125-143.
- KELLY, R.E., 1967, "On the stability of an inviscid shear layer which is periodic in space and time", *J. Fluid Mech.*, **27**, pp 657-689.
- KLINE, S.J., REYNOLDS, W.C., SCHRAUB, F.A. and RUNSTADLER, P.W., 1967, "The structure of turbulent boundary layers", *J. Fluid Mech.*, **30**, pp 741-773.
- KRAICHNAN, R.H., 1967, "Inertial ranges in two-dimensional turbulence". *Phys. Fluids*, **10**, pp 1417-1423.

- KRAICHNAN, R.H., 1976, "Eddy viscosity in two and three dimensions", *J. Atmos. Sci.*, **33**, pp 1521-1536
- LEITH, C.E., 1968, "Diffusion approximation for two dimensional turbulence", *Phys. Fluids*, **11**, pp 671-673.
- LEITH, C.E. and KRAICHNAN, R.H., 1972, "Predictability of turbulent flows", *J. Atmos. Sci.*, **29**, pp 1041-1058.
- LESIEUR, M., 1983, "Intermittency of coherent structures, an approach using statistical theories of isotropic turbulence", in "Turbulence and chaotic phenomena in fluids", T. TATSUMI ed., North-Holland, pp 339-350.
- LESIEUR, M., 1987, "Turbulence in Fluids", Nijhoff Publishers.
- LIEPMANN, H.W. and LAUFER, J., 1947, "Investigation of free turbulent mixing", N.A.C.A. Tech. Note, nx 1257.
- McWILLIAMS, J.C., 1984, "The emergence of isolated coherent vortices in turbulent flows", *J. Fluid. Mech.* **146**, pp 21-43.
- METAIS, O., CHOLLET, J.P. and LESIEUR, M., 1983, "Predictability of the large scales of freely-evolving three-and two- dimensional turbulence", *Proc. A.I.P. Conf.* **106**, "Predictability of fluid motions", G. HOLLOWAY and B.J. WEST eds., pp 303-319.
- METAIS, O. and LESIEUR, M., 1986, "Statistical predictability of decaying turbulence", *J. Atmos. Sci.*, **43**, pp 857-870.
- METCALFE, R.W., ORSZAG, S.A., BRACHET, M.E., MENON, S. and RILEY, J., 1986, "Secondary instability of a temporally growing mixing layer", preprint.
- MICHALKE, A., 1964, "On the inviscid instability of the hyperbolic tangent velocity

- profile", J. Fluid. Mech., **19**, pp 543-556.
- MOFFATT, H.K., 1986, "Geo- and Astrophysical turbulence", in Proceedings of the "European Turbulence Conference, Lyon 1986", G. COMTE-BELLOT and J. MATHIEU eds., Springer Verlag.
- MOIN, M. and KIM, J., 1982, "Numerical investigation of turbulent channel flow", J. Fluid. Mech., **118**, pp 341-378.
- MORY, M. and HOPFINGER, E., 1986, "Structure functions in rotationally dominated turbulent flow", Phys. Fluids., **29**, pp 2140-2146.
- PERRY, A.E. and CHONG, M.S., 1982, "On the mechanism of wall turbulence", J. Fluid Mech., **119**, pp 173-217.
- PERRY, A.E., CHONG, M.S. and LIM, T.T., 1982, "Vortices in turbulence", in "Vortex motion", pp 106-121, Proceedings of the 75th anniversary of the Aerodynamische Versuchsanstalt, Goettingen, edited by H.G. HORNING and E.A. MULLER (Friedr. Vieweg and Sohn, Braunschweig, Wiesbaden).
- PIERREHUMBERT, R.T. and WIDNALL, S.E., 1982, "The two- and three-dimensional instabilities of a spatially periodic shear layer", J. Fluid Mech. **114**, pp 59-82.
- RILEY, J.J. and METCALFE, R.W., 1980, "Direct numerical simulation of a perturbed turbulent mixing layer", A.I.A.A. 18th Aerospace Sci. Meeting, Pasadena, 80-0274.
- SCHWARZTRAUBER, P. and SWEET, R., 1980, "Efficient fortran subprograms for the solution of EPD equations", N.C.A.R. Boulder, Colorado.
- SOMMERIA, J., 1986, "Experimental study of the two-dimensional inverse energy

cascade in a square box", J. Fluid Mech., **170**, pp 139-168.

STAQUET, C., 1985, "Etude numérique de la transition à la turbulence bidimensionnelle dans une couche de mélange", Thèse de l'Université de Grenoble.

STAQUET, C., METAIS, O. and LESIEUR, M., 1985, "Etude de la couche de mélange et de sa cohérence du point de vue de la turbulence bidimensionnelle", C.R. Acad. Sci., t. 300, serie II, pp 833-838.

TANEDA, S., 1981, "Large scale periodic motions in turbulent shear layers", J. Phys. Soc. Japan, **50**, pp 1398-1403.

WINANT, C.D. and BROWAND, F.K., 1974, "Vortex pairing, the mechanism of turbulent mixing layer growth at moderate Reynolds number", J. Fluid Mech., **63**, pp 237-255.

WOOD, D.H. and BRADSHAW, P., 1982, "A turbulent mixing layer constrained by a solid wall", J. Fluid Mech., **122**, pp 57-90.

WYGNANSKI, I. and FIEDLER, H.E., 1970, "The two-dimensional mixing region", J. Fluid Mech., **41**, pp 327-361.

ZABUSKY, N.J. and DEEM, G.S., 1971. "Dynamical evolution of two-dimensional unstable shear flows", J. Fluid Mech., **47**, pp 353-379.

FIGURE CAPTIONS

[Figure 1] Vorticity field obtained after 15 characteristic initial turnover times δ_i/U in a 4-eddy calculation (256^2 grid points). Colors indicate the vorticity magni-

tude (blue for the regions of intense vorticity $2U/\delta_i$, red for the irrotational outer flow).

[Figure 2 – a] Vorticity field of an artificial spatial mixing layer associated to the 8-eddy calculation (256^2 grid points). This field is obtained with a sequence of 15 vorticity fields separated by a period of time of $5 \delta_i/U$.

[Figure 2 – b] 4-eddy calculation (256^2 grid points). The vorticity field is shown from $t = 0$ to $t = 80$.

[Figure 3] Isovorticity lines and corresponding spatial one-dimensional longitudinal energy spectra during the evolution of the mixing layer in a 4-eddy calculation (183^2 grid points). a) The low k cutoff wavenumber is $k_1 = 2\pi/4\lambda_a$. The wavenumber associated to the deterministic sine perturbation is $k_4 = 4k_1$. The flat spectrum corresponds to the white noise. b) The fundamental mode grows. c) End of the first pairing. d) End of the second pairing.

[Figure 4] Evolution with time of the kinetic energy of the wave numbers $k_1 = \pi/2\lambda_a$, $k_2 = 2k_1$ and $k_4 = 4k_1$, in the calculation of Figure 3.

[Figure 5] Evolution with time of the vorticity thickness averaged on two realizations of the flow differing only by the initial white noise realization. Calculations (256^2 grid points) are carried out in a square domain of size D (Figure 5 – a), $2D$ (Figure 5 – b) and $4D$ (Figure 5 – c) respectively. Arrows 1,2,3, 4 indicate the fundamental structures formation and the first, second and third pairing respectively. t_B marks the layer-growth inhibition due to the boundary conditions. On Figure 5 – d are superposed the three calculations. The straight

line shows the slope of the mean linear growth (0.10).

[Figure 6]Schematic view of a three-dimensional instability of wave length $2\pi/k_z$ developing on a coherent structure.

[Figure 7]Kinetic energy and error spectra in the mixing layer (4-eddy calculation, 183^2 grid points). The initial error (white noise) has been superposed (at $t = 15$) on fundamental structures already formed. The error rises progressively in the large scales of the energy spectrum.

[Figure 8]Sensitivity of the flow to the initial white noise (8-eddy calculation, 256^2 grid points). The vorticity field of the calculation of Figure 5 – b is displayed at $t = 80$ for the two realizations of the initial white noise.

[Figure 9]Evolution of the relative error rate averaged across the layer from $y = -D/2$ to $y = +D/2$ in the same calculation as in Figure 5 . The error stops increasing in the mean at the same times t_B (50, 90 and 150 respectively) where the layer stops growing.

[Figure 10]Same data as in Figure 9, in semi-log coordinates; the error starts increasing exponentially with a characteristic time of $3 \delta_i/U$ (straight line), up to $t = 25 \delta_i/U$. Afterwards it grows still exponentially in the mean, with a characteristic time of $15 \delta/U$, where δ is the vorticity thickness at the beginning of this period.

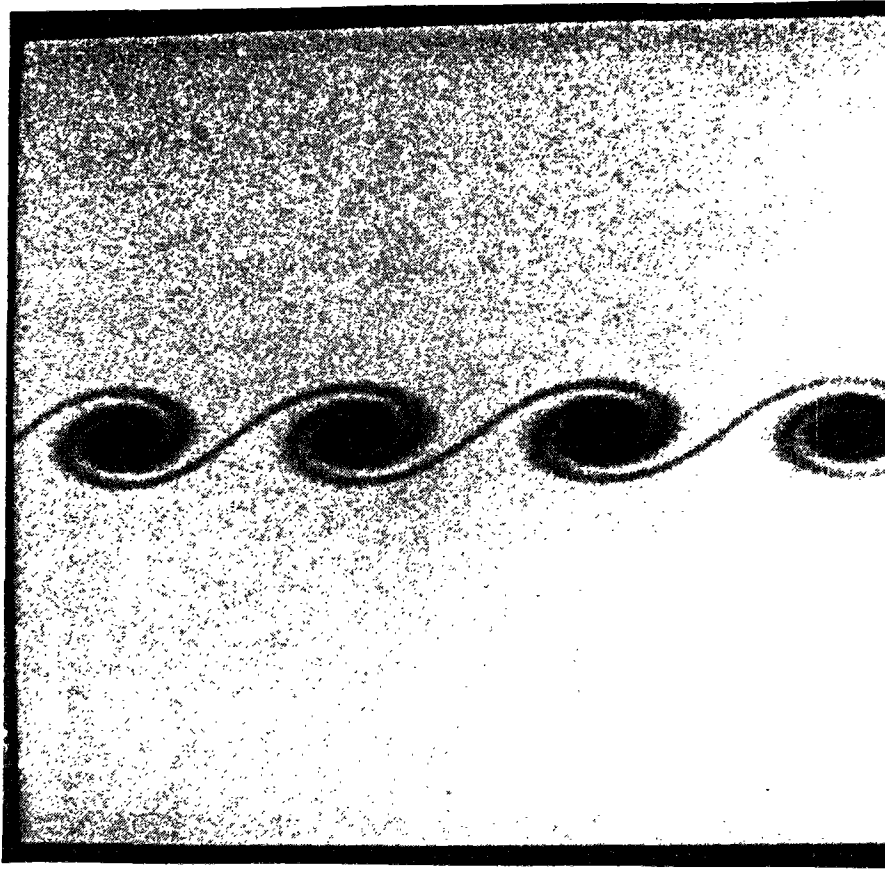
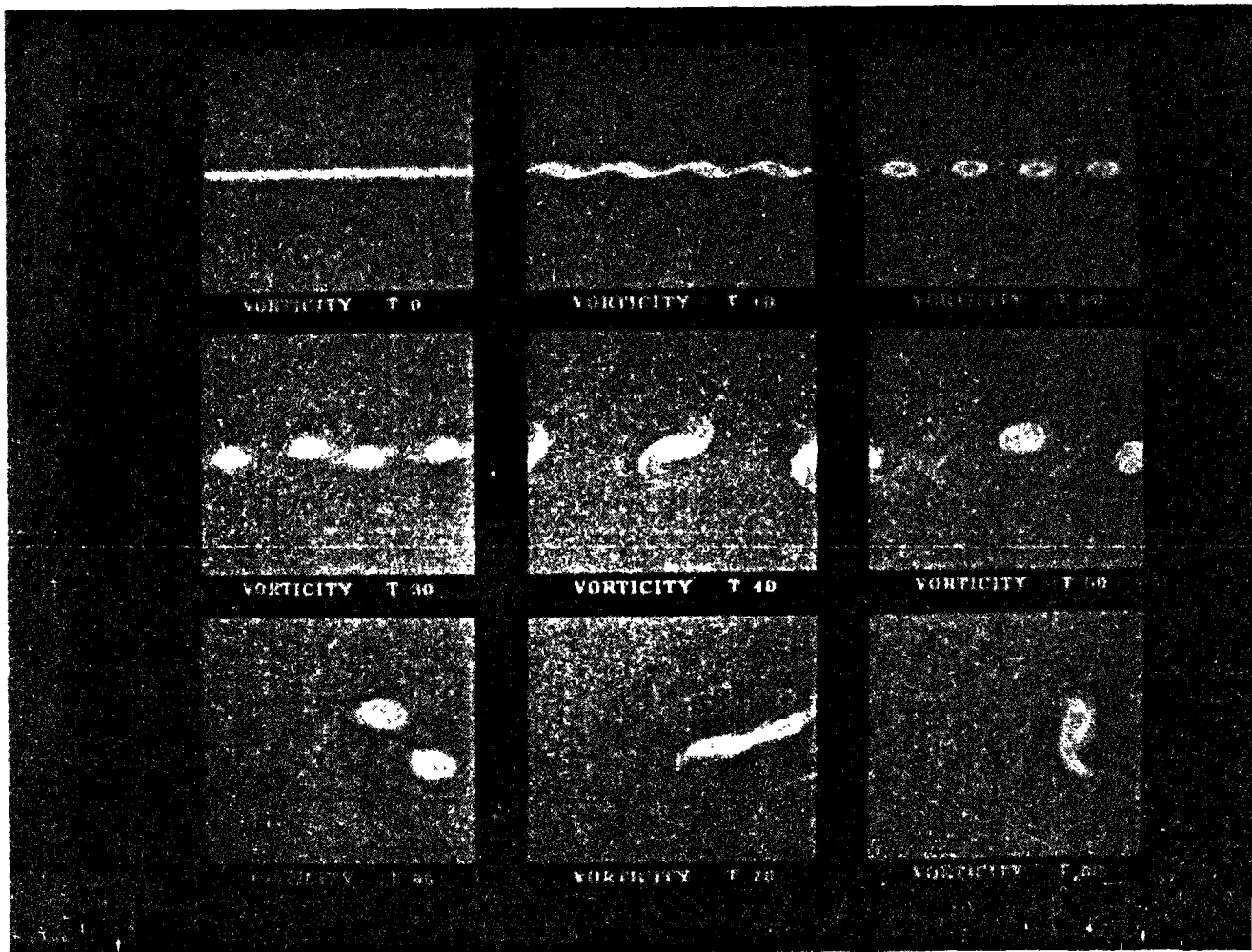


Fig 1
(will be published in color).



a

FIGURE 2 (Im Colour)



b

Figure 3

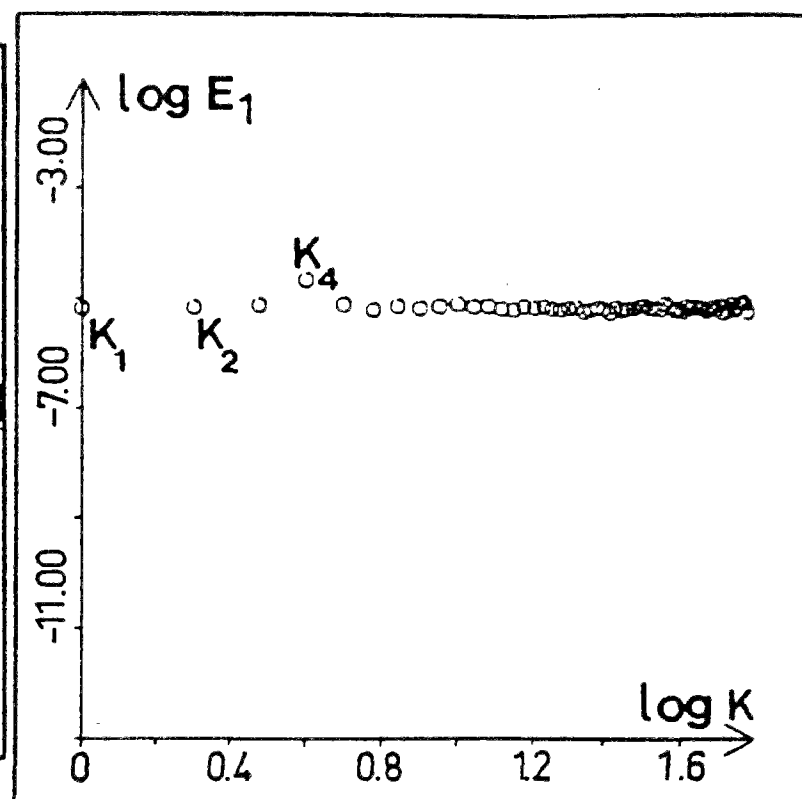
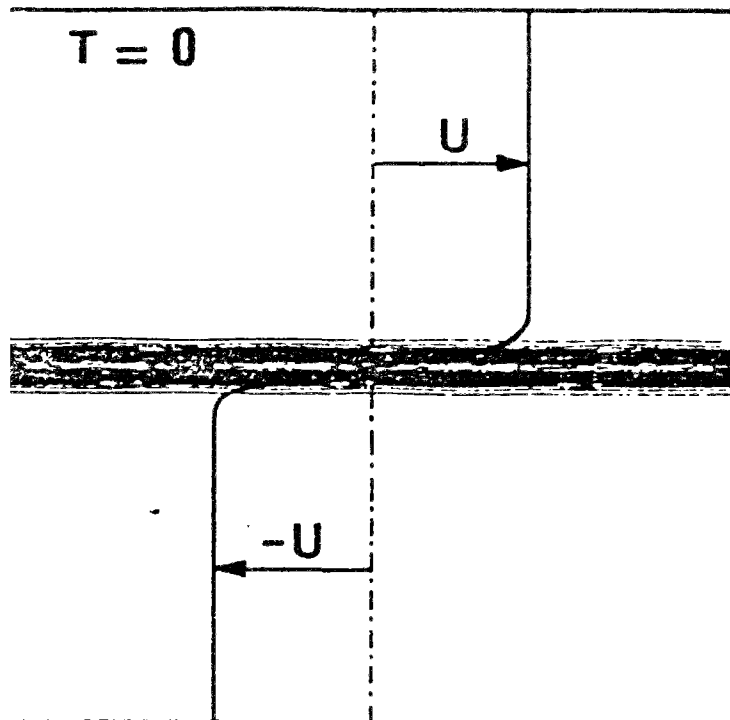


fig 3a

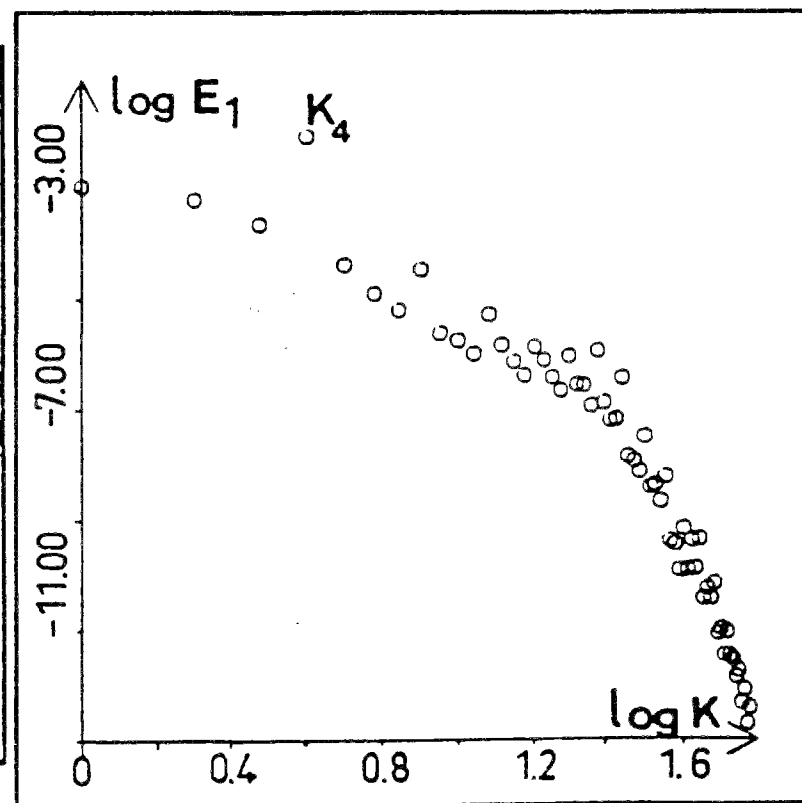
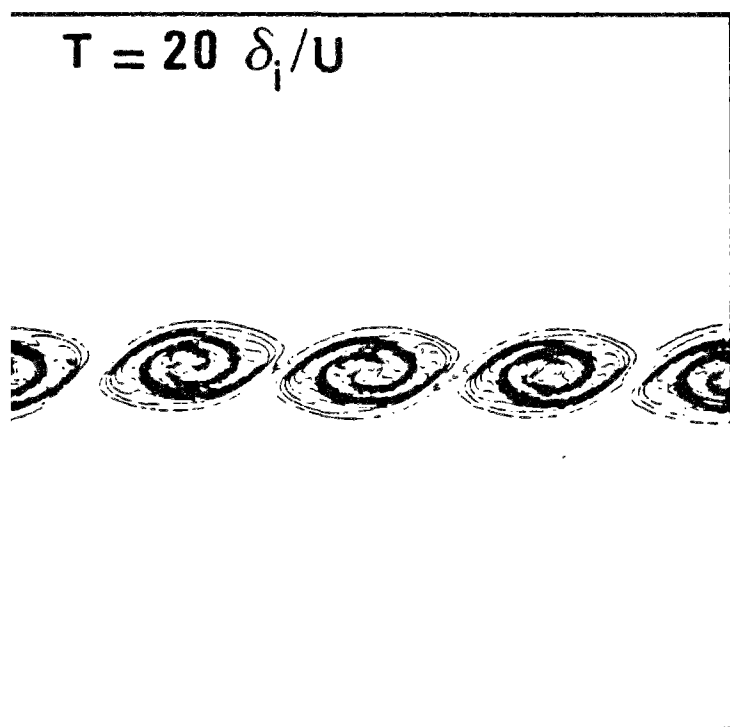


fig 3b

Figure 3 (cont.)

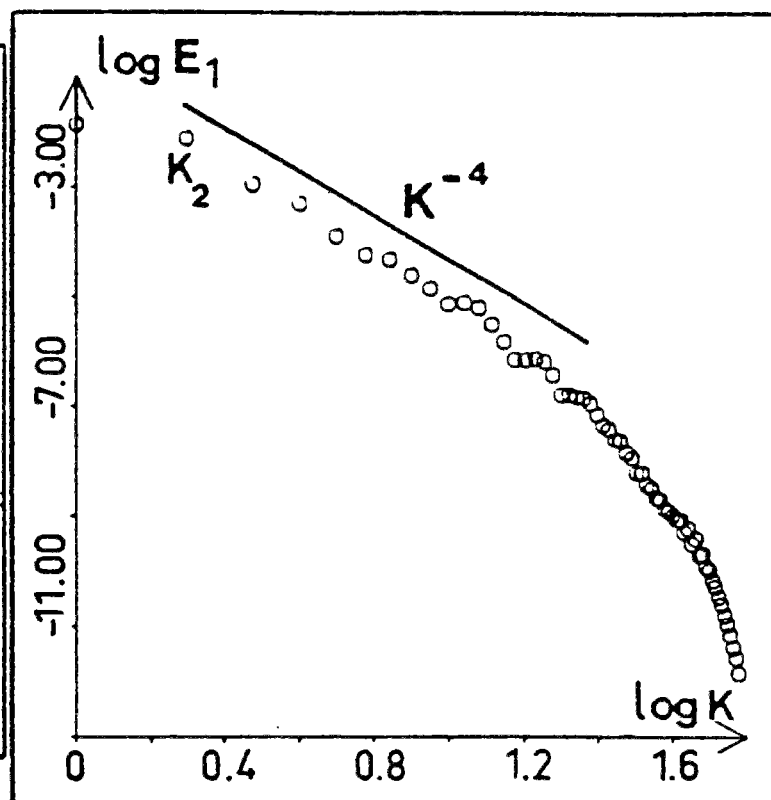
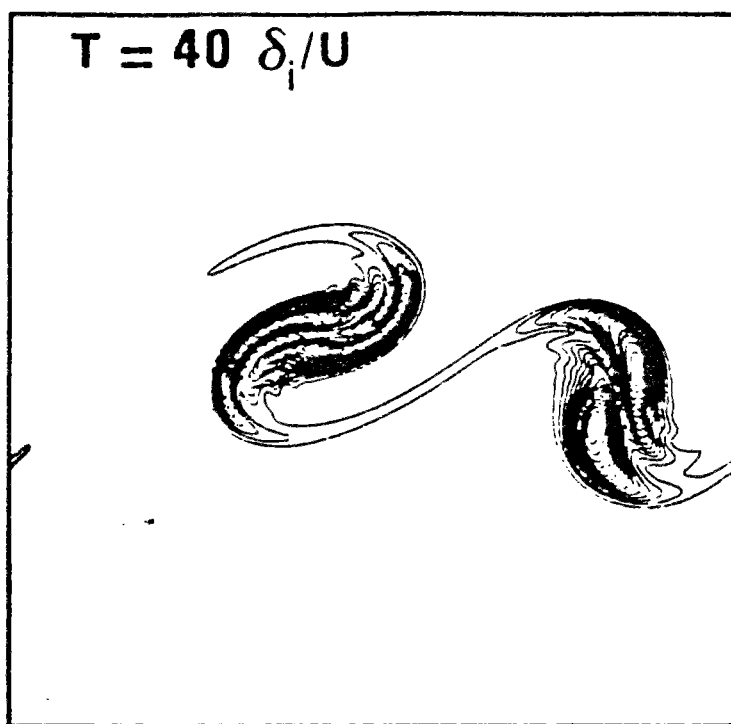


Fig 3c

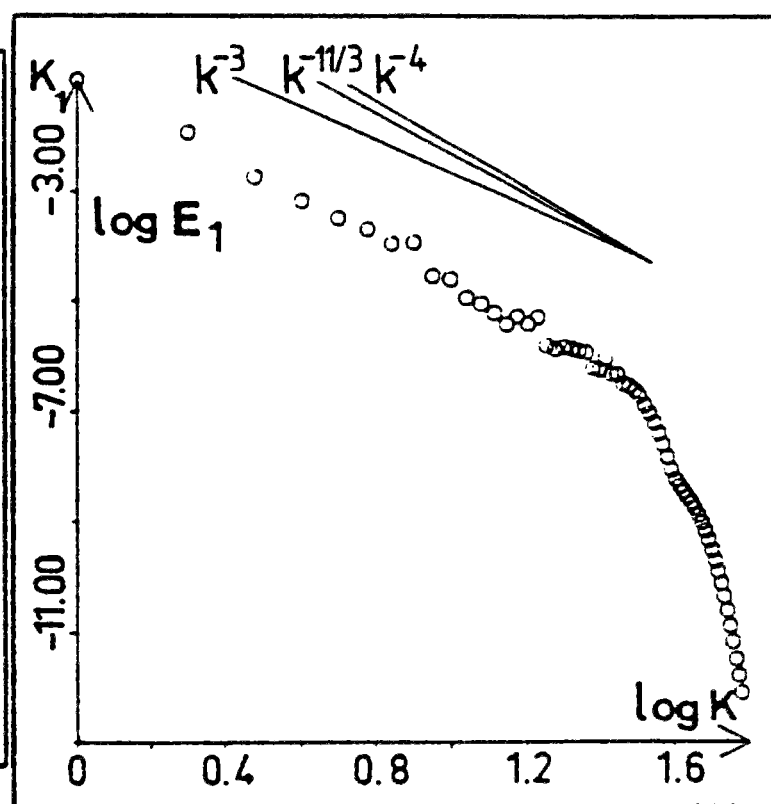
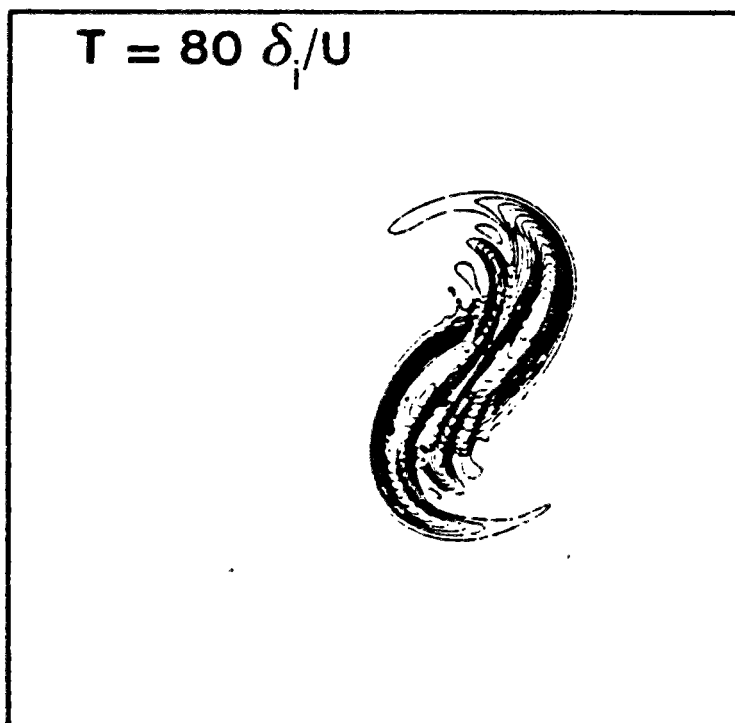


Fig 3d

Figure 4.

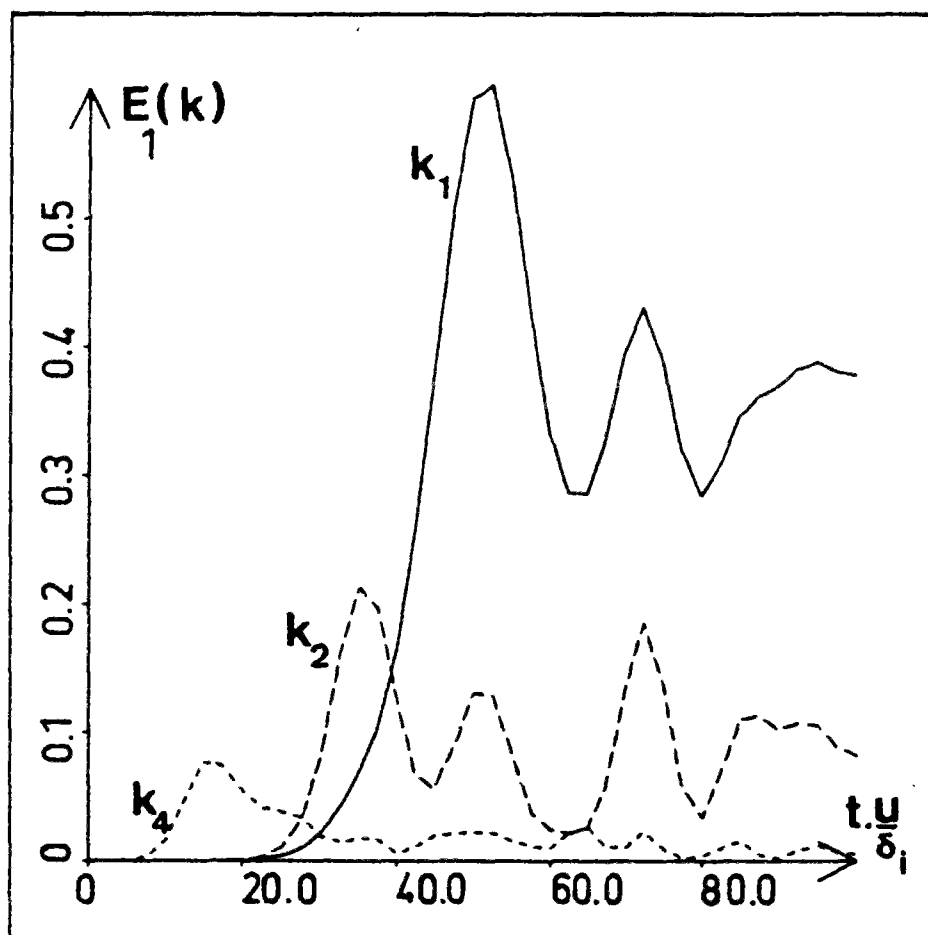


Fig. 4

Fig 5

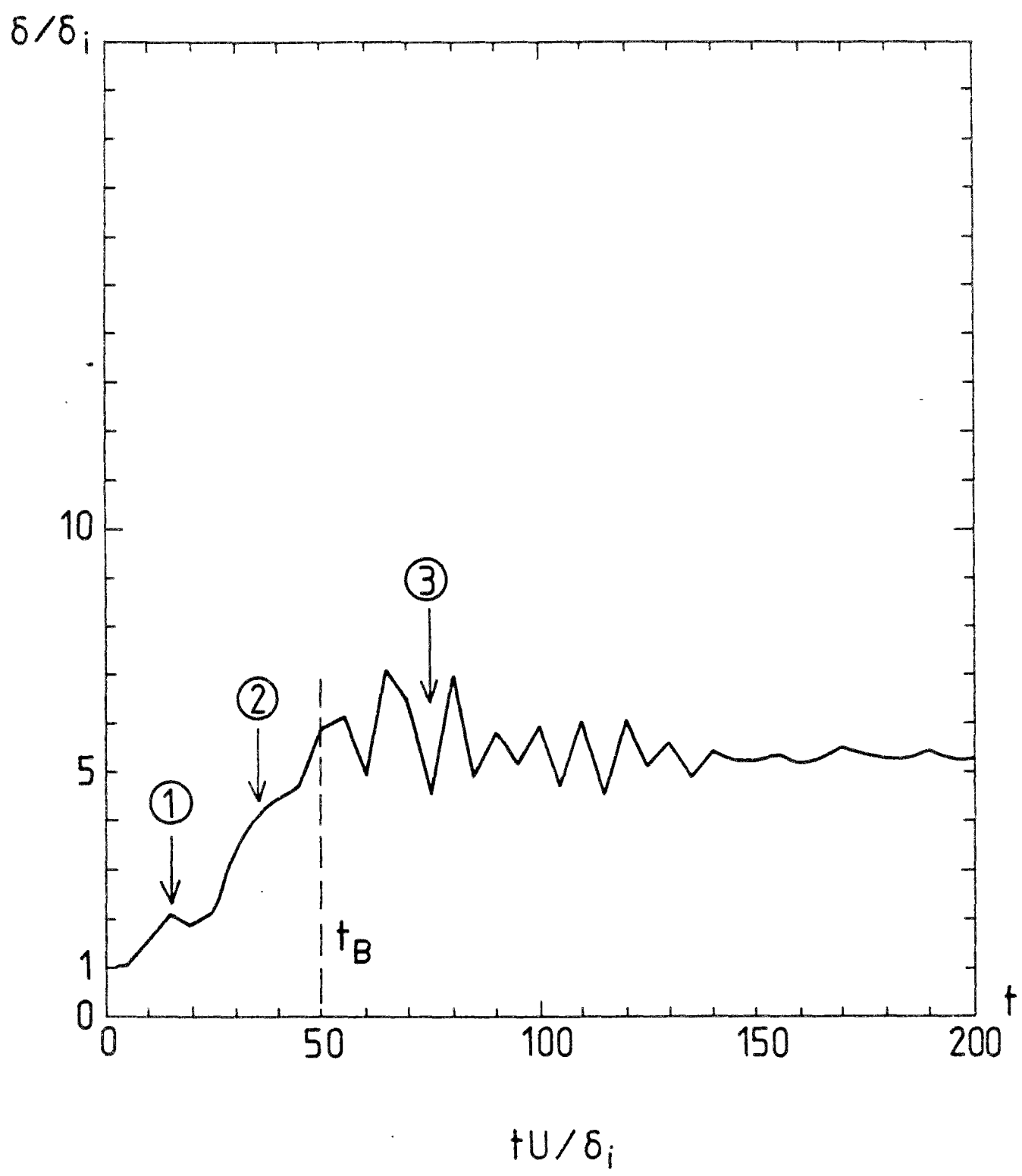


Fig 5 (cont.)

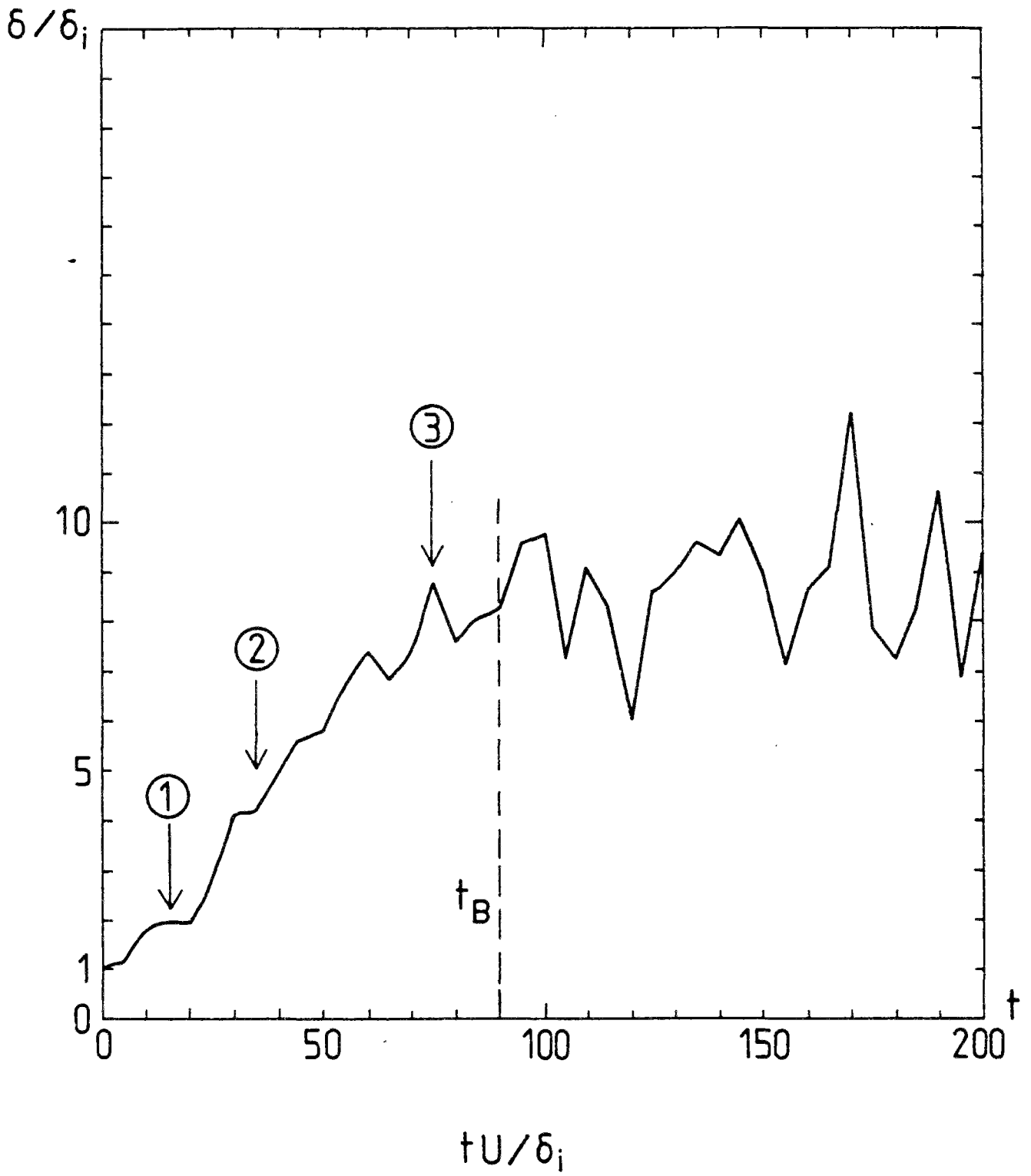


Fig 5 (cont.)

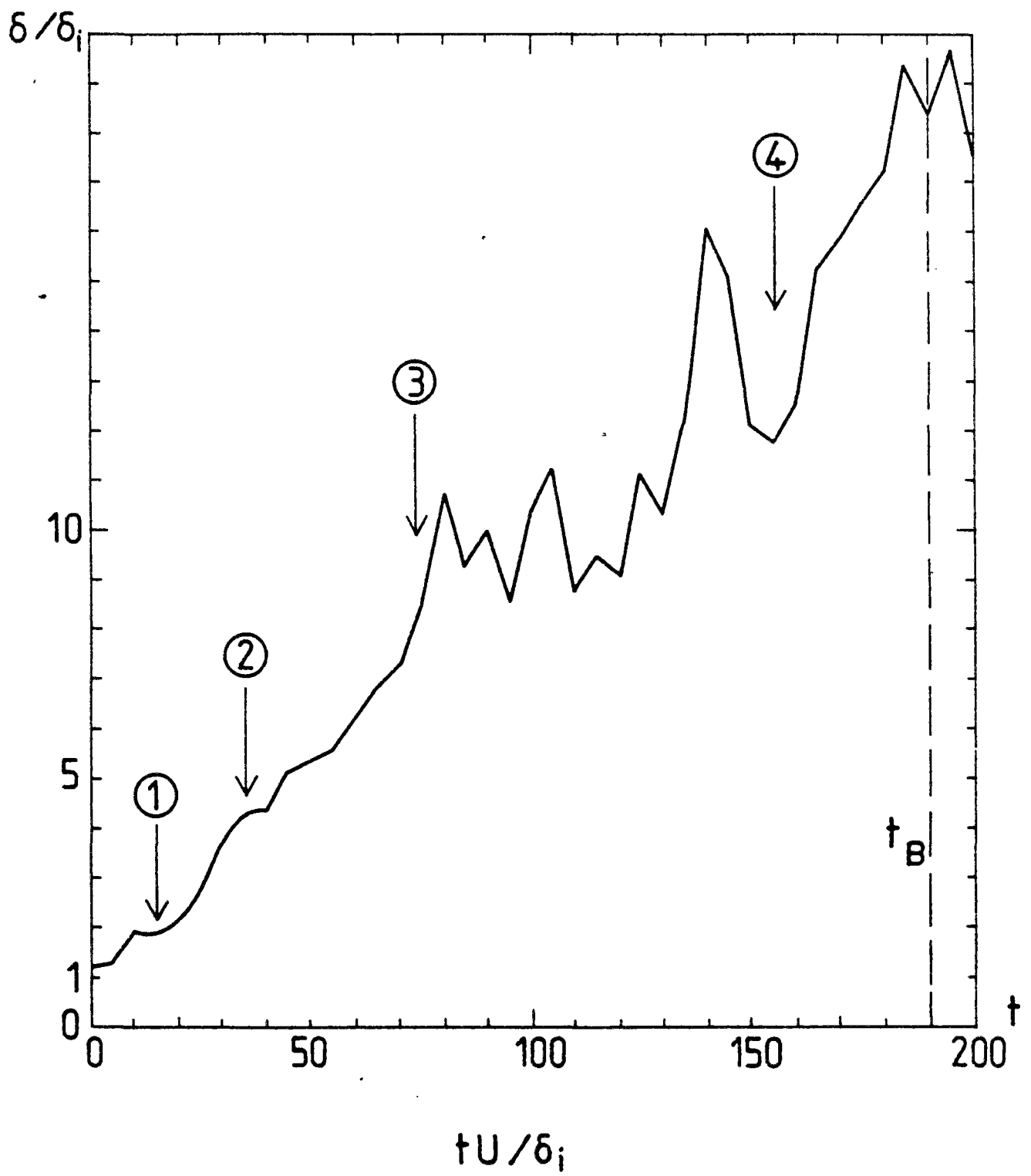


Fig 5 (cont.)

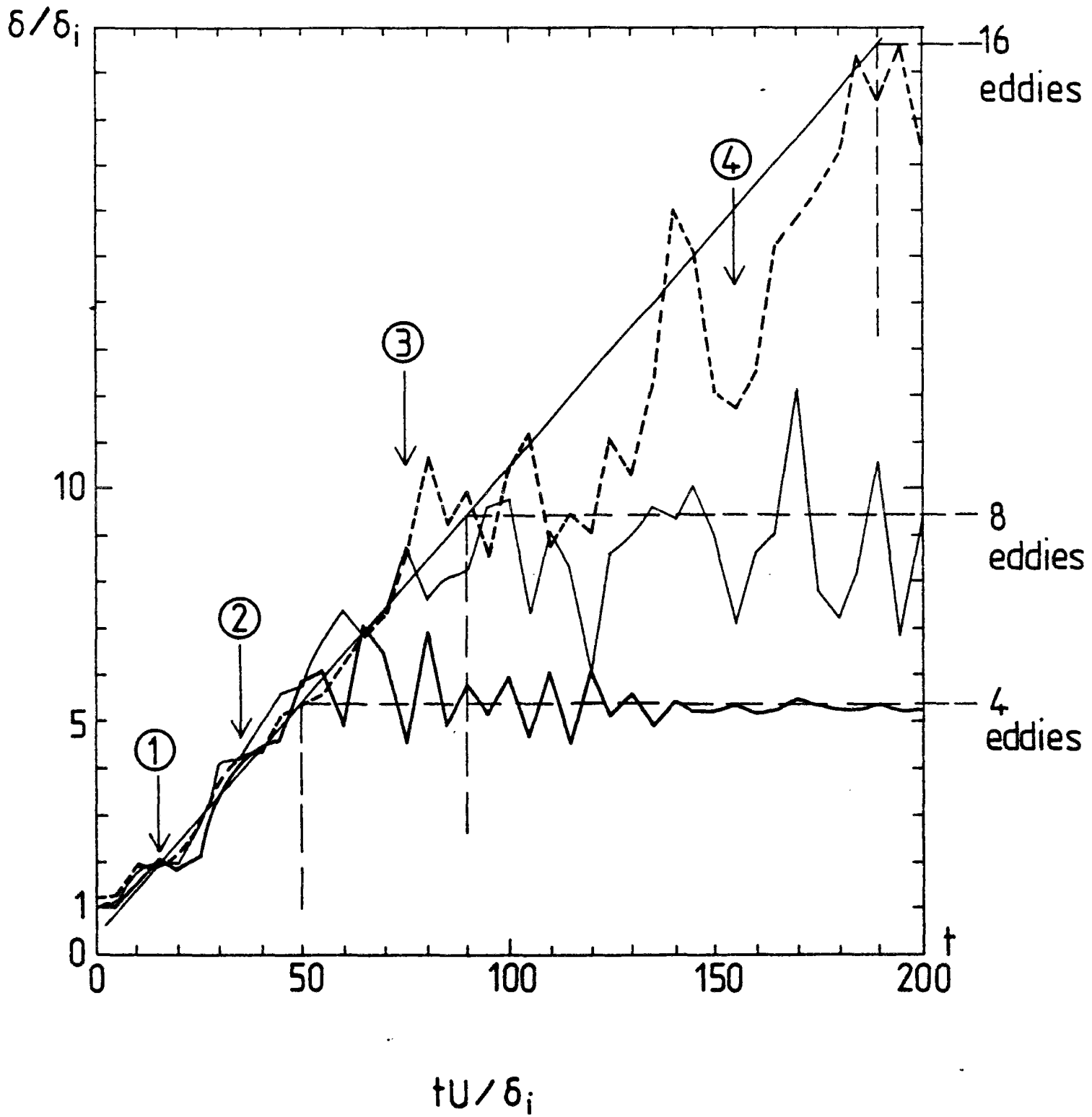


Fig 5.6.

figure 6

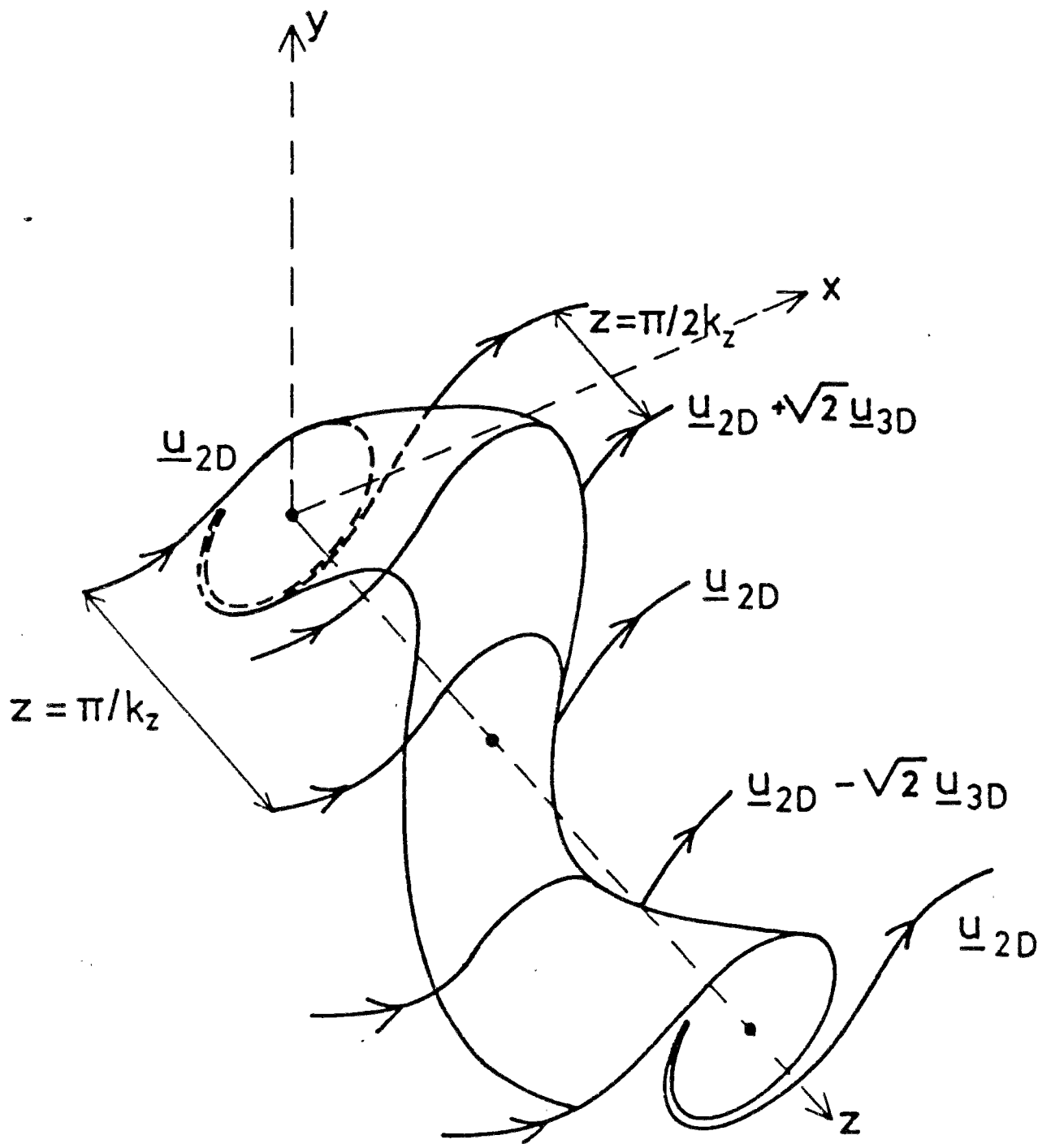
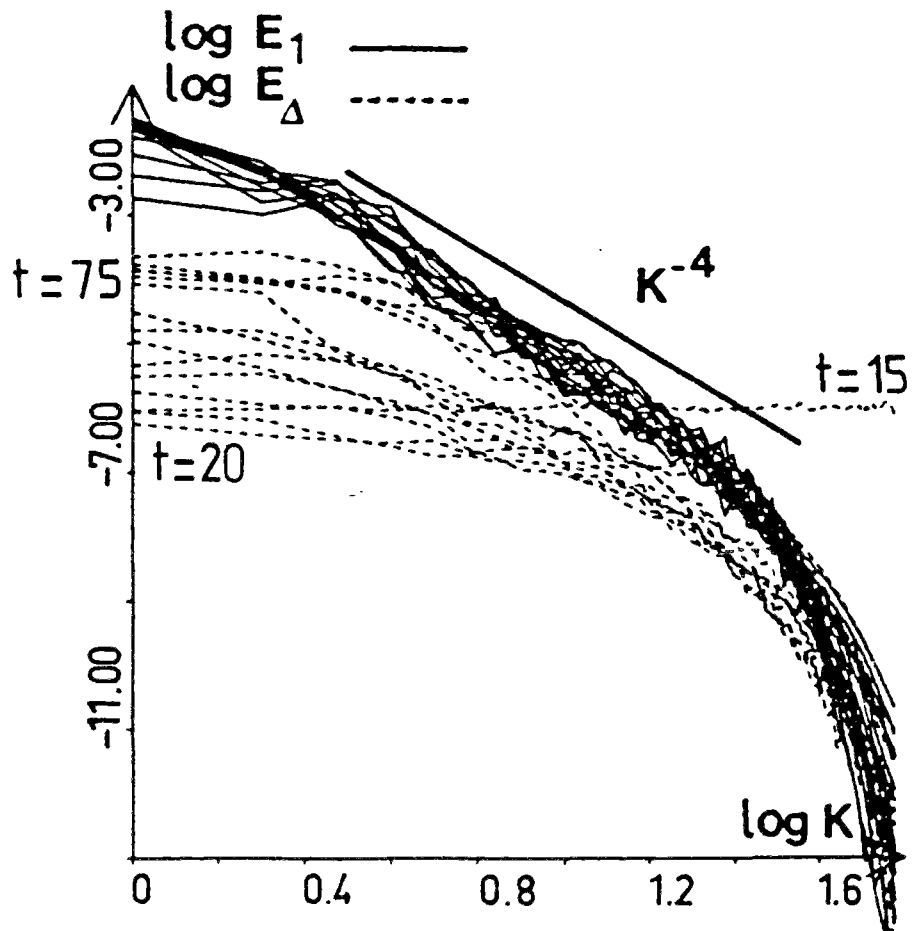


fig 6

Figure 7



log $\tilde{\epsilon}$

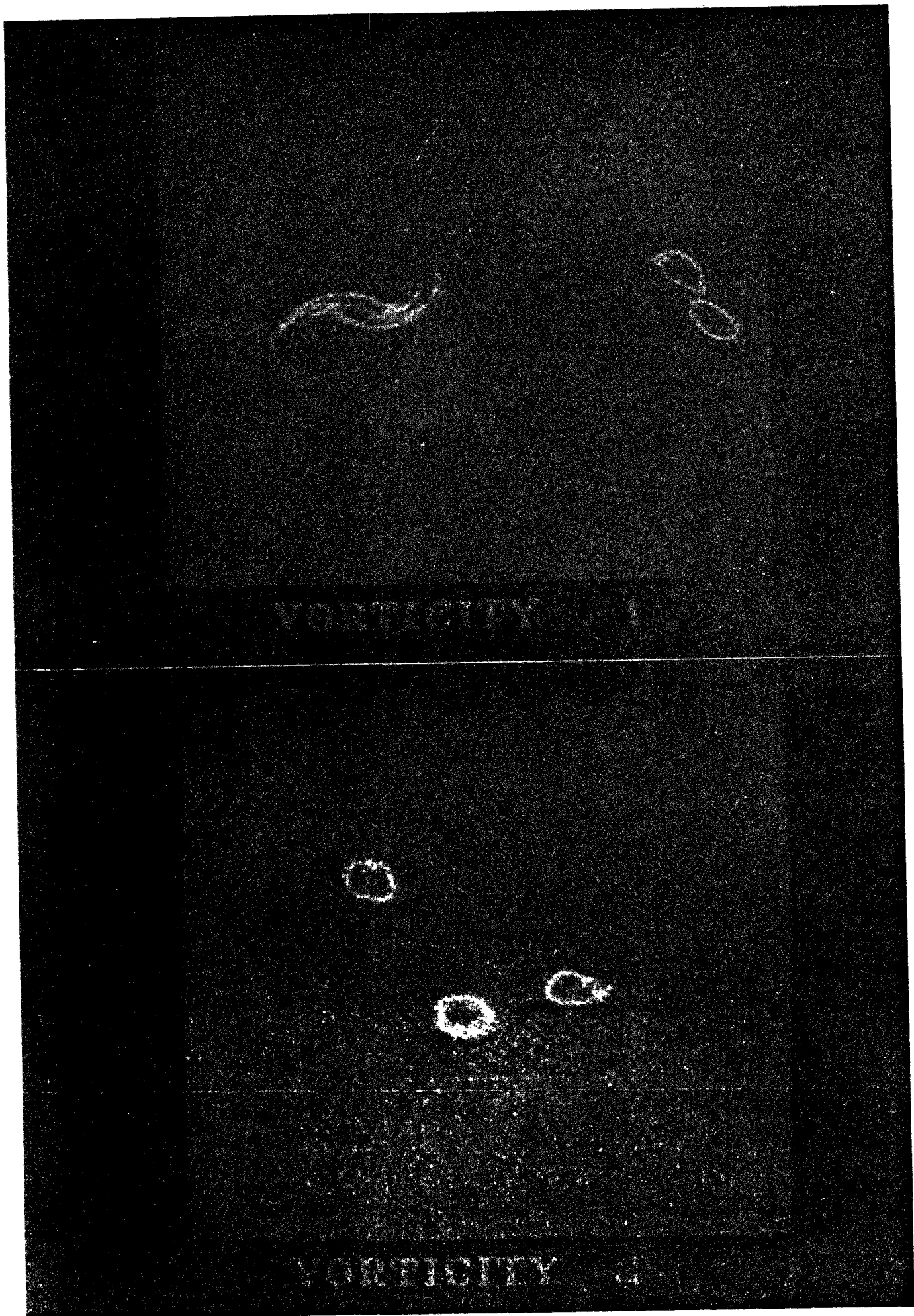


Figure 8 (colour)

Figure 9

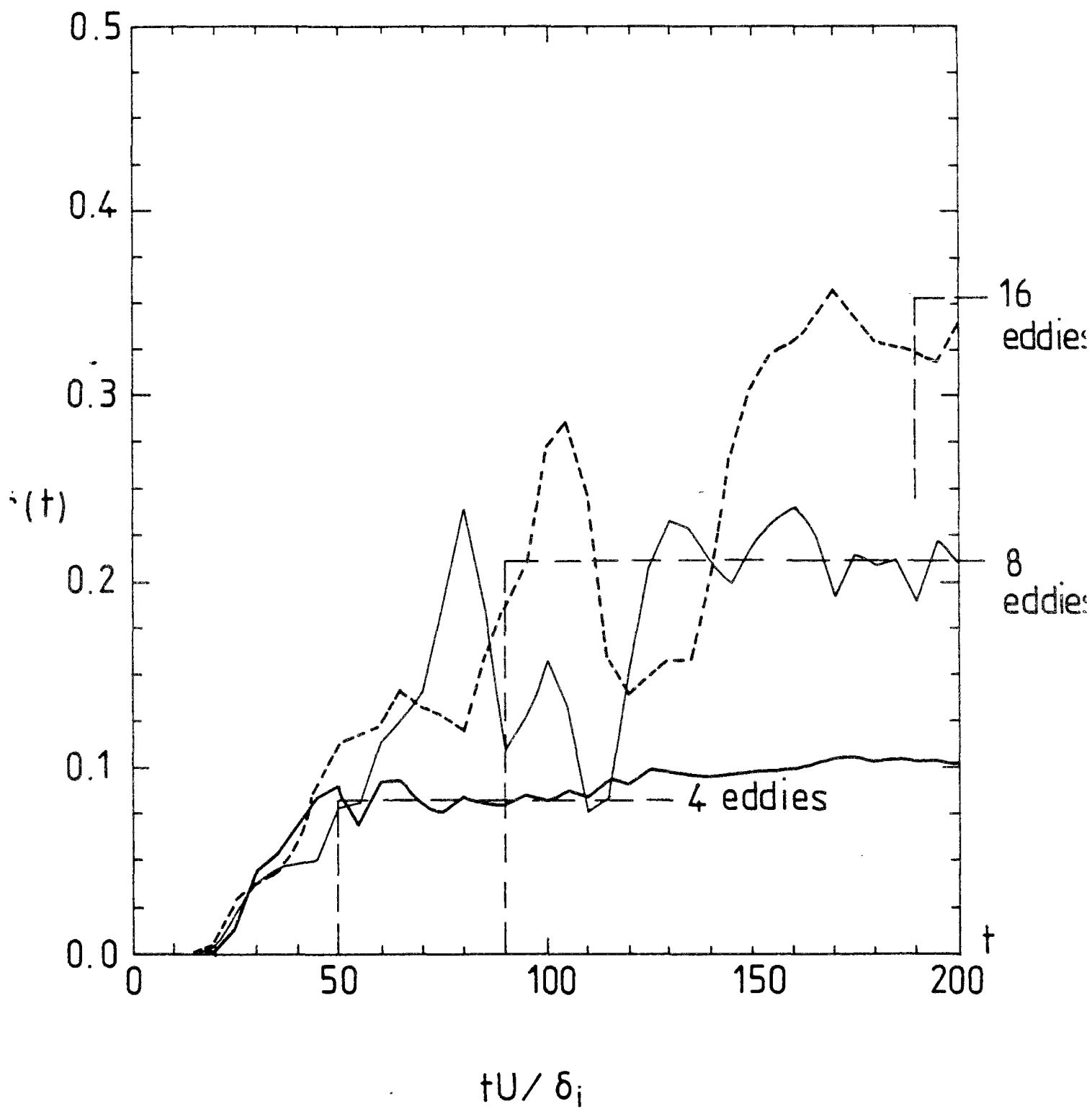


Fig 9

Figure 10.

